

۹ پاسخ تمرین ۱۳

تمرین. نشان دهید T دارای اصلبندی با فرمولهایی با سوره‌های عمومی است، اگر و تنها اگر تحت زیرساختارگیری بسته باشد؛ یعنی هرگاه $N \models T$ و $M \subseteq N$ آنگاه $M \models T$.

پاسخ. گیریم T تحت زیرساختارگیری بسته باشد، نشان خواهیم داد که $T = T_{\forall}$ ؛ منظور از T_{\forall} مجموعه‌ی همه‌ی نتایج T است که با سور عمومی نوشته‌شدن‌ینند.

فرض کنید $M \models T_{\forall}$. نشان می‌دهیم که $N \models T$ چنان موجود است که $M \subseteq N$ ؛ از این نیز بنا به فرض سوال نتیجه خواهد شد که $M \models T$.

باید سازگاری $T \cup \text{Diag}(M)$ ثابت شود، و برای آن کافی است برای هر $\phi(m) \in \text{Diag}(M)$ سازگاری $T \cup \{\phi(m)\}$ ثابت شود. اگر مجموعه‌ی یادشده ناسازگار باشد

$$T \models \neg\phi(m)$$

و از آنجا که m ثابتی است زبانی، داریم

$$T \models \forall x \neg\phi(x).$$

فرمول بالا، تنها دارای سور عمومی است، و از این رو بنا به فرض $M \models \forall x \neg\phi(x)$ ؛ پس $M \models \neg\phi(m)$ ، که این آخری متناقض است با $\phi \in \text{Diag}(M)$. \square