سامانه‌های رفت‌وبرگشتی

آنچه در این بخش آمده است، در توضیح پاسخ تمرینِ ۱۱ نوشته شده است.

سامانه‌های رفت‌وبرگشتی در نظریه‌ی مدل بسیار ظاهر می‌شوند. عموماً آنجا که کامل بودن تئوریها، حذف سور برای آنها، یا برابری تایپها را بخواهیم نشان دهیم، این سامانه‌ها نیک به کار می‌آیند. در زیر برخی کاربردهای سامانه‌های این‌چنین را برای مثال آورده‌ایم.

فرض کنید M, N دو ساختار در زبانِ L باشند. گیریم $\bar{a} \in M$ و $\bar{b} \in N$. نگاشت f را که $\bar{a}$ را به $\bar{b}$ می‌برد، یک ایزومرفیسمِ جزئی می‌خوانیم، هرگاه ایزومرفیمسی باشد میان زیرساختارهای تولید شده توسطِ $\bar{a}$ و $\bar{b}$ به ترتیب در M و N. در این صورت، همچنین می‌نویسیم

$$\mathrm{qftp}^M(\bar{a}) = \mathrm{qftp}^N(\bar{b}),$$

که در بالا، منظور از qftp تایپِ متشکل از فرمولهای بدون سور است.

مجموعه‌ی Γ را، متشکل از برخی ایزومرفیسمهای جزئی میان زیرساختارهایی از M و N، دارای ویژگیِ رفت‌وبرگشتی می‌خوانیم، هرگاه هر $f \in \Gamma$ را بتوان هم از دامنه (رفت) و از بُرد (برگشت) گستراند؛ به بیان دیگر هرگاه

- برای هر $f \in \Gamma$ و هر $a \in M$ عنصرِ $g' \supseteq f$ در Γ به گونه‌ای موجود باشد که $a \in \mathrm{dom}(g)$.
- برای هر $f \in \Gamma$ و هر $b \in N$ عنصرِ $g' \supseteq f$ در Γ به گونه‌ای موجود باشد که $a \in \mathrm{range}(g)$.

امکان رفت و برگشت، به بیان دیگر امکان وجود یک سامانه‌ی رفت‌وبرگشتی، عموماً نیازمند شروط اشباعی مدلها و برابری تایپهاست. از طرفی وجود چنین سامانه‌هایی، خود موجب برابری تایپها می‌شود.

مثال ۲۵: گیریم M و N دو ساختارِ شمارا باشند و سامانه‌ای رفت‌وبرگشتی، چون Γ، میان زیرساختارهایی از آنها موجود باشد. در این صورت $M \cong N$.

گیریم $M = (m_i)_{i \in \omega}$ و $N = (n_i)_{i \in \omega}$. نخست توجه می‌کنیم که ایزومرفیسمِ $f_۱ \in \Gamma$ چنان موجود است که $a_۰ \in \mathrm{dom}(f_۱)$ و $b_۰ \in \mathrm{range}(f_۱)$. فرض کنید $f \in \Gamma$. در این صورت، بنا به تعریفِ سامانه‌ی رفت‌وبرگشتی، ایزومرفیسمِ جزئیِ $f \supseteq g$ موجود است که $a_۰$ را در دامنه

دارد، و ایزومرفیسمِ جزئیِ $g \subseteq h$ موجود است که b_0 را در بُرد خود دارد. قرار دهید $f_1 = h$.
بدین‌ترتیب، فرض کنید که ایزومرفیسمِ جزئیِ f_{n+1} چنان ساخته شده است که $a_0, \dots, a_n$ را در دامنه و $b_0, \dots, b_n$ را در بُرد دارد. به روش ذکرشده، $f_{n+1} \subseteq f_{n+2}$ را چنان می‌یابیم که a_{n+1} و b_{n+1} را به ترتیب در دامنه و برد داشته باشد. حال (تحقیق کنید که) $f_\omega = \bigcup_{i\in\omega} f_i : M \to N$ یک ایزومرفیسم میان M و N است. $\square$

توجه کنید که در بالا، f_ω خود شاید عضوی از سامانه‌ی رفت‌وبرگشتی نباشد، و از این رو دلیلی ندارد که بتوان روند بالا برای $f_{\omega+1}$ نیز ادامه داد. باندازه‌اشباع بودن ساختارهای تحت مطالعه، می‌تواند امکان ادامه‌ی فراروند رفت و برگشتی را فراهم کند. پیش از پرداختن بدین، در زیر مشاهده می‌کنیم که وجود سامانه‌های رفت و برگشتی، حداقل ضامن معادل بودن مقدماتی است.

مثال ۲۶: گیریم M, N دو ساختار باشند و Γ یک سامانه‌ی رفت‌وبرگشتی از ایزومرفیسمهای میان زیرساختارهاشان. آنگاه $M \equiv N$.

باید نشان دهیم که هر جمله‌ی ϕ در M درست است اگروتنهااگر در N درست باشد. این را با استقراء روی ساختِ فرمول ϕ می‌توان نشان داد. تحقیق درستی این گفته را، آنجا که ϕ فرمولی بدون سور است، به خواننده وامی‌گذارم. فرض کنید $M \models \exists x\phi(x)$. در این صورت عنصرِ $m \in M$ چنان موجود است که $M \models \phi(m)$. از طرفی بنا به تعریف، m را می‌توان در دامنه‌ی یک نگاشتِ $f \in \Gamma$ پنداشت. از این رو $N \models \phi(n)$؛ یعنی $N \models \exists x\phi(x)$. $\square$

بنابراین هرگاه بخواهیم ثابت کنیم که تئوریِ T کامل است، کافی است دو مدل از آن را در نظر گرفته و میان آنها یک سامانه‌ی رفت و برگشتی برقرار کنیم.

مثال ۲۷: گیریم $M = (a_\beta), N = (b_\beta)$ دو ساختارِ κ ـ اشباع و هم‌اندازه باشند و Γ سامانه‌ای باشد رفت و برگشتی از ایزومرفیسمهای میان زیرساختارهاشان. اگر $\{f_\beta\}_{\beta<\kappa}$ زنجیری صعودی باشد از ایزومرفیسمهای موجود در Γ، به گونه‌ای که $\mathrm{dom}(f_\beta) \supseteq a_{<\beta}$ و $\mathrm{range}(f_\beta) \supseteq b_{<\beta}$، آنگاه می‌توان $\bigcup_\beta f_\beta$ را هم در Γ فرض کرد؛ یعنی فراروندِ رفت و برگشت پس از اجتماعگیری‌های نامتناهی نیز قابل ادامه‌دادن است.

فرض کنید بخواهیم a_β را به دامنه‌ی $\bigcup f_\beta$ بیفزاییم. تایپِ $p(x) = \mathrm{qftp}(a_\beta/a_{<\beta})$ را در نظر بگیرید. ادعا می‌کنیم که عنصری چون $d \in N$ چنان موجود است که $b \models f_\beta(p(x))$.

برای این منظور باید نشان داد که هر بخش متناهی از تایپ یادشده در N برآورده می‌شود. فرض کنید $\phi(x, c_{<n})$ فرمولی بدون سور در تایپ p باشد. می‌دانیم که نگاشتی چون $f \in \{f_\beta\}$ موجود

است که $c_{<n}$ در دامنه‌اش واقع می‌شود؛ از این رو داریم

$$\models \phi(a_\beta, c_{<n}) \Leftrightarrow \phi(g(a_\beta), g(c_{<n}))$$

که در بالا $f \subseteq g$ نگاشتی در Γ است که دامنه‌اش a_β را در بردارد.

به روشی مشابه می‌توان نشان داد که نگاشت $\bigcup f_\beta$ را می‌توان از بُرد نیز گستراند. $\square$

مثال ۲۸: اگر M, N دو ساختارِ اشباعِ هم‌اندازه باشند و میانشان سامانه‌ای رفت و برگشتی موجود باشد، آنگاه $M \cong N$.

مثال بالا، در واقع نتیجه‌ای از مثال پیشینش است. در مثال بعدی خواهیم داد که برابری دو تایپ، خود دلیلی است برای وجود سامانه‌ای رفت و برگشتی که تحت اجتماع نیز بسته باشد. تفاوت مثالهای زیر با مثالهای قبل در این است که در آنها، به جای ایزومرفیسمهای جزئی، سخن از سامانه‌هایی است از نگاشتهای مقدماتی جزئی. به هر حال، منطق بحثها همان است که در آن مثالها دیدیم.

مثال ۲۹: فرض کنید M, N دو مدل اشباعِ هم‌اندازه باشند و $a \in M, b \in N$ چنان باشند که $\mathrm{tp}^M(a) = \mathrm{tp}^N(b)$. آنگاه ایزومرفیسمی میان M و N موجود است که a را به b می‌برد.

توجه کنید که $\mathrm{qftp}^M(a) = \mathrm{qftp}^N(b)$. بنابراین ایزومرفیسمِ جزئیِ f موجود است که a را به b می‌برد. (از آن جا که $\mathrm{tp}(a) = \mathrm{tp}(b)$، ایزومرفیسم یادشده، و سایر ایزومرفیسمهایی که در ادامه به سامانه‌ی رفت و برگشتیمان خواهیم افزود، در واقع نشاندنهای جزئیِ مقدماتی هستند). هدف، نشان دادن این است که f در سامانه‌ای رفت‌وبرگشتی (از نشاندنهای جزئیِ مقدماتی) واقع می‌شود. آنگاه از آنجا که مدلها اشباعند و هم‌اندازه، بنا بر مثالِ ۲۷ سامانه‌ی یادشده تحت اجتماعگیری نیز بسته است و از این رو، با کمک آن و با توجه به همان مثال می‌توان به ایزومرفیسمی رسید که شرایط مطلوب را داشته باشد.

فرض کنید $x \notin \mathrm{dom}(f)$. از آنجا که a و b همتایپند، تایپ $\mathrm{tp}^M(x/a)$ را (منظور تایپ متناظرش است تحت نگاشتِ f) می‌توان به طور متناهی در N برآورد، و بنا بر اشباعیِ N عنصری چون y موجود است، به طوری که $\mathrm{tp}^M(xa) = \mathrm{tp}^N(yb)$. این روند را می‌توان در هر مرحله به صورت رفت‌وبرگشتی انجام داد؛ یعنی سامانه‌ای رفت و برگشتی موجود است. $\square$

مثال بالا را می‌توان به صورت زیر بازنوشت:

مثال ۳۰: در مدل هیولا، $\mathrm{tp}(a/A) = \mathrm{tp}(b/A)$ اگروتنهااگر اتومرفیسمی موجود باشد که a را به b ببرد.

در تمرین ۹ دیدیم که حذف سور معادل این است که تایپهای کامل از تایپهای بدون سور نتیجه می‌شوند. آمیختن این گفته با مثالهایی که تا کنون آورده‌ایم، نتیجه می‌دهد که:

مثال ۳۱: تئوریِ T سورها را حذف می‌کند اگروتنهااگر هر ایزومرفیسمِ جزئیِ $a \mapsto b$ میان دو مدل اشباعِ هم‌اندازه از T در یک سامانه‌ی رفت‌وبرگشتی از ایزمرفیسمها واقع شود.

اثبات. نگاشت یادشده را می‌توان به ایزومرفیسمی مقدماتی میان M و N گستراند. بنابراین $\mathrm{tp}^M(a) = \mathrm{tp}^N(b)$. □

در مثال پایانی زیر، کوشیده‌ایم تا بی‌آنکه نامی از مدل هیولا و یا اشباع بودن مدلها بیاوریم، قضیه‌ی مشابهی ثابت کنیم.

مثال ۳۲: فرض کنید M ساختاری باشد دلخواه و داشته باشیم $\mathrm{tp}^M(a/A) = \mathrm{tp}^M(b/A)$. آنگاه یک توسیع مقدماتیِ N از M موجود است، به همراه اتومرفیسمی چون $f : N \to N$ به طوری که $f(a) = b$.

اثبات. همانگونه که معمول اثباتهای قضایای این چنین است، N را به صورت اجتماعی از زنجیری شمارا و مقدماتی از مدلها خواهیم ساخت. نیز، برای راحتی قرار می‌دهیم $A = \emptyset$ (علت: می‌توان A را به زبان افزود).

گیریم $M = (a_i)_{i<\lambda}$ به طوری که $a_0 = a$. نگاشت $a_0 \mapsto^{f_1} b$ یک ایزومرفیسم جزئی است. برای افزودنِ a_1 به دامنه‌ی آن، تایپِ $p(x) = \mathrm{tp}(a_1/a_0)$ را درنظرگرفته توجه کنید که مشابه قبل $f_1 p(x)$ در N به طور متناهی برآورده می‌شود. بنابراین توسیعِ مقدماتیِ $N_1 \succ N$ و عنصرِ $y \in N_1$ چنان موجودند که

$$\mathrm{tp}^{N_1}(yf(a_0)) = \mathrm{tp}^M(xa_0).$$

بدین‌ترتیب، اگر $f_\alpha : M \to N_\alpha(\succ M)$ نگاشتی باشد دربرگیرنده‌ی $a_{<\alpha}$ در دامنه، برای ساختنِ $f_{\alpha+1} : M \to N_{\alpha+1}$ به شیوه‌ی یادشده a_α را به دامنه‌ی f_α می‌افزاییم. در حالتی که α اردینالی حدی است، قرار می‌دهیم $f_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} f_\beta$. با این کار، به توسیعِ مقدماتیِ $N_0 = \bigcup N_\alpha$ از M و نگاشتِ $f_0 = \bigcup f_\alpha : M \to N_0$ می‌رسیم، به طوری که دامنه‌ی f همه‌ی M را می‌پوشاند، و نیز $f(a) = b$.

قرار دهید $N_0 = (n_i)_{i<\gamma}$. داریم $\mathrm{tp}^{N_0}(a) = \mathrm{tp}^{N_0}(b)$. بنابراین به همان روش ذکرشده می‌توان توسیع مقدماتیِ N_1 از N را به همراه نگاشتِ $f_1 : N_0 \to N_1$ چنان حاصل کرد که

همچنان a را به b ببرد و دامنه‌اش شاملِ N، باشد. حال $\bigcup N_i$ توسیعی است مقدماتی از N و نگاشتِ $f : \bigcup N_i \to \bigcup N_i$ که هر $x \in N_i$ را به $f_i(x)$ می‌برد، اتومرفیسمی است که a را به b می‌برد. $\square$