۱۰ پاسخ تمرینِ ۳۱

تمرین ۷۵: مدلِ M از تئوریِ T را **بسته‌ی وجودی** بخوانید هرگاه برای هر $M \subseteq N \models T$ و هر فرمولِ بدون سورِ $\phi(\bar{x},\bar{y})$ و $\bar{m} \in M$، از $N \models \exists \bar{a} \quad \phi(\bar{a},\bar{m})$ نتیجه شود $M \models \exists \bar{a} \quad \phi(\bar{a},\bar{m})$.

نشان دهید هر تئوریِ دارای اصلبندیِ به فرم $\forall\exists$ دارای مدلی بسته‌ی وجودی است. (تحقیق کنید که اگر $T \models M$ آنگاه مدلی بسته‌ی وجودی چون $M \subseteq N$ موجود است به طوری که $|N| = |M| + |L| + \aleph_0$.)

اثبات. نخست یادآوری می‌کنم که بنا به تمرینِ

تئوریِ T تنها و تنها اگر دارای اصلبندیِ به صورتِ $\forall\exists$ است که اجتماع هر زنجیر از مدلهای آن مدلی از آن شود.

فرض کنید $M \models T$. نخست نشان خواهم داد که مدلی چون $M \subseteq M_1$ چنان موجود است که نسبت به M ـ فرمولها بسته‌ی وجودی است؛ بدین معنی که اگر $N \supseteq M_1$ و $N \models \exists \bar{x} \quad \phi(\bar{x},\bar{m})$ و $\bar{m} \in M$ آنگاه $M_1 \models \exists \bar{x} \quad \phi(\bar{x},\bar{m})$.

شمارشِ $\{\phi_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ را از تمامِ فرمولهای به فرمِ $\exists x \quad \phi(x,m)$ که در آن $m \in M$ در نظر گرفته مدل مورد نظر را به شرح زیر، از زنجیری از مدلها به طول κ حاصل خواهیم آورد. قرار می‌دهیم $N_0 = M$. هرگاه که مدل N_α ساخته شده باشد، برای ساختِ $N_{\alpha+1}$ به فرمولِ ϕ_α مراجعه می‌کنیم: اگر این فرمول در توسیعی از N_α برقرار باشد، $N_{\alpha+1}$ را همان توسیع می‌گیریم، وگرنه قرار می‌دهیم $N_{\alpha+1} = N_\alpha$. نیز برای هر اردینالِ حدیِ β قرار می‌دهیم $N_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} N_\alpha$. تحقیق کنید که N_κ ویژگی مورد انتظار را داراست، و قرار دهید $M_1 = N_\kappa$.

همین کار را با شروع از M_1 تکرار می‌کنیم و بدین‌ترتیب به زنجیری از طولِ ω می‌رسیم از مدلهایی چون M_i با این ویژگی که هر M_i نسبت به فرمولهای وجودیِ با پارامتر در M_{i-1} بسته‌ی وجودی باشد. اجتماعِ همه‌ی اینها مدلی است بسته‌ی وجودی. □