وجود مدل اول، پاسخ تمرینِ ۳۳

در جزوه، اثباتی توپولوژیک برای قضیه‌ی زیر ارائه کردیم. در زیر آن را با استفاده از قضیه‌ی حذف تایپها ثابت کرده‌ایم.

گزاره ۶۱: اگر در T تایپهای ایزوله چگال باشند، آنگاه T دارای مدل اول است.

اثبات. دیدیم که وجود مدل اول معادل وجود مدلی اتمیک است. گیریم هیچ مدلی از T اتمیک نباشد؛ یعنی

$$\forall \mathfrak{M} \models T \quad \exists a \in M \quad \text{tp}(a) \text{ غیرایزوله است}$$

عبارتِ «$\text{tp}(a)$ غیرایزوله است» معادل این است که «a در هیچ فرمولی که تایپی ایزوله کند صدق نمی‌کند»، به بیان دیگر، a مجموعه‌ی زیر از فرمولها را برآورده می‌کند:

$$\pi(x) = \{\neg\phi(x) | \phi \text{ کامل}\}.$$

نیز همانگونه که گفتیم $\pi(x)$ در T حذف نمی‌شود. پس بنا به قضیه‌ی حذف تایپ، باید ایزوله باشد. از طرفی غیرایزوله بودن این تایپ، بیان معادلی برای فرض گزاره (ایزوله بودن تایپهای چگال) است. در زیر این گفته را ثابت کرده‌ایم.

نخست توجه کنید که اگر ϕ یک فرمول کامل باشد، آنگاه از آنجا که این فرمول یک تایپ به دست می‌دهد، برای هر فرمولِ ψ داریم: یا $\phi \vdash \psi$ یا $\phi \vdash \neg\psi$. یعنی برای هر فرمولِ ψ اگر $\phi \cup \psi$ سازگار باشد، آنگاه $\phi \vdash \psi$.

غیر ایزوله بودنِ π یعنی این که هیچ فرمولی آن را ایزوله نکند. یعنی برای هر فرمولِ ψ فرمولی مانند $\phi \in \pi$ موجود باشد به طوری که

$$\psi \nvdash \phi.$$

از عبارتِ $\psi \nvdash \phi$ نتیجه می‌شود که ψ با $\neg\phi$ سازگار است. از طرفی از آنجا که $\phi \in \pi$ معلوم است که $\neg\phi$ کامل است. پس بنا به دو بند قبل،

$$\neg\phi \vdash \psi.$$

یعنی برای هر فرمولِ داده‌شده‌ی ψ فرمول کاملِ $\neg\phi$ یافت می‌شود به طوری که $[\psi]$ شامل تایپی است که $\neg\phi$ آن را ایزوله می‌کند؛ یعنی تایپهای ایزوله چگالند. □