## ۶.۲ جلسه‌ی نوزدهم

برای یک تئوریِ فاقد مدل متناهی در یک زبان شمارا، مفهوم مرتبه‌ی مُرلی را تعریف کردیم.

مثال ۱۸۹: در زبانِ $L=\{E_1,E_2\}$ تئوریِ $T$ را در نظر بگیرید که می‌گوید

- $E_1$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است با نامتناهی کلاس و هر کلاس آن نامتناهی است.
- $E_2$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است که $E_1$ به طور نامتناهی را تظریف می‌کند (یعنی هر کلاسِ $E_1$ اجتماعی از نامتناهی کلاسِ $E_2$ است)، و هر کلاسِ آن نامتناهی است.

(بررسی کنید که) $T$ کامل، دارای حذف سور و $\omega$ جازم است و ۳ $\mathrm{RM}(x=x)=$.

مثال ۱۹۰: به طور مشابه در زبانِ $L=\{E_1,E_2,E_3\}$ می‌توان یک تئوری از روابط هم‌ارزی نوشت که در آن ۴ $\mathrm{RM}(x=x)=$.

مثال ۱۹۱: زبانِ $L=\{E_1,E_2,\ldots\}$ و تئوریِ $T$ را در آن در نظر بگیرید که طبق آن هر $E_i$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است با نامتناهی کلاس و هر کلاس آن نامتناهی است و $E_{i+1}$ تظریفی است از $E_i$. تئوری یادشده $\aleph_0$ جازم نیست. ادعا می‌کنیم که در این تئوری، فرمولهای $\{\phi(\bar{x},\bar{b}_\tau)\}_{\tau\in\omega^{<\omega}}$ به شکلِ درختی $\omega$ انشعابی، چنان موجودند که هر $\{\phi(\bar{x},b_{\tau\frown i})\}_{i\in\omega}$ ناسازگار است و برای هر $i$ داریم $\phi(\bar{x},\bar{b}_\tau)\rightarrow\phi(\bar{x},\bar{b}_{\tau\frown i})$. توجه کنید که $\omega^{<\omega}$ درختی است ساخته شده از زیرمجموعه‌های متناهیِ $\omega$ به طوری که در ریشه‌ی آن مجموعه‌ی $\emptyset$ قرار می‌گیرد، روی تهی شاخه‌های $\ldots,۲,۱,۰$ قرار می‌گیرند، و بدین ترتیب روی ۰ شاخه‌های $\ldots,۰۲,۰۱,۰۰$ جای گرفته‌اند و درخت به طور مشابه ادامه می‌یابد.

درخت یادشده را به صورت زیر می‌سازیم:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & x=x & & & \\
 & E_1(x,a_1) \arrow[ur] & & E_1(x,a_2) \arrow[ul] & E_1(x,a_3) \arrow[ull] & \ldots \arrow[ulll] \\
E_2(x,a_{11}) \arrow[ur] & E_2(x,a_{12}) \arrow[u] & \ldots \arrow[ul] & & &
\end{tikzcd}$$

توجه کنید که بنا به وجود درخت بالا، تعداد تایپها روی یک مجموعه‌ی شمارا (پارامترهای درخت) برابر با $2^{\aleph_0}$ است. پس تئوری بالا، $\omega$ پایدار نیست. در جلسات بعد نشان خواهیم داد که $\omega$ پایداری

معادل با کاملاً متعالی بودن، یعنی داشتن مرتبه‌ی مرلیِ اردینالی است. پس در تئوری بالا فرمولِ $x = x$ دارای مرتبه‌ی مرلیِ $\infty$ است؛ به طور کلی،

ادعای ۱۹۲: اگر یک تئوریِ $T$ فرمولهای $\{\phi(\bar{x}, \bar{b}_\tau)\}_{\tau \in \omega^{<\omega}}$ در درختی $\omega$ انشعابی به سان بالا قرار بگیرند، در این تئوری، مرتبه‌ی مرلی فرمول نشسته در بالای درخت، بی‌نهایت است.

*اثبات.* توجه کنید که در یک درخت این‌چنین، اگر مرتبه‌ی فرمول نشسته در بالا از اردینالِ $\alpha$ بیشتریامساوی باشد، آنگاه از $\alpha + ۱$ نیز بیشتریامساوی است؛ زیرا تصویر درخت در هر فرمولِ زیرین تکرار شده است. حال توجه کنید که مرتبه‌ی مرُلی فرمولِ $\phi_\emptyset$ از هر $n \in \omega$ بیشتر است. $\square$

توجه ۱۹۳: وجود درخت دوشاخه شونده نیز وجود درخت $\omega$ انشعابی را نتیجه می‌دهد؛ زیرا از میان درخت دو شاخه شونده با حذف برخی شاخه‌ها می‌شود درخت ۴ شاخه شونده و بدین ترتیب $۲n$ شاخه شونده درآورد، و بنا به فشردگی به درختی $\omega$ انشعابی رسید.

در جلسه‌ی بعد ثابت خواهیم کرد که

گزاره ۱۹۴: تئوریِ $T$ یک تئوریِ $\omega$ پایدار است اگروتنهااگر کاملاً متعالی باشد.

لم ۱۹۵ (ویژگی‌های مرتبه‌ی مرُلی):

- $\mathrm{RM}(\phi) \geq ۰$ اگروتنهااگر $\phi(M) \neq \emptyset$.
- $\mathrm{RM}(\phi) \geq ۱$ اگروتنهااگر $\phi(M)$ نامتناهی باشد.
- اگر

$$\mathfrak{M} \models \forall \bar{x} \quad (\phi(\bar{x}, \bar{m}) \to \psi(\bar{x}, \bar{b}))$$

آنگاه $\mathrm{RM}(\psi) \geq \mathrm{RM}(\phi)$.

- $\mathrm{RM}(\phi \vee \psi) = \max\{\mathrm{RM}(\phi), \mathrm{RM}(\psi)\}$.

*اثبات.* تنها مورد آخر را ثابت می‌کنیم، و برای آن ثابت می‌کنیم که برای هر اردینالِ $\alpha$

$$\mathrm{RM}(\phi \vee \psi) \geq \alpha \Leftrightarrow \max\{\mathrm{RM}(\phi), \mathrm{RM}(\psi)\} \geq \alpha.$$

اثبات گفته‌ی بالا برای $\alpha = 0$ و اردینالهای حدی، آسان است. فرض کنیم $\mathrm{RM}(\phi \vee \psi) \geq \alpha + 1$. آنگاه فرمولهای $\gamma_i \subseteq \phi \vee \psi$ چنان موجودند که $\mathrm{RM}(\gamma_i) \geq \alpha$. داریم

$$(\phi \vee \gamma_i) \wedge (\psi \vee \gamma_i) \equiv \gamma_i.$$

بنا به فرض استقراء، از آنجا که $\mathrm{RM}(\gamma_i) \geq \alpha$ داریم

$$\max\{\mathrm{RM}(\phi \vee \gamma_i), \mathrm{RM}(\psi \vee \gamma_i)\} \geq \alpha.$$

پس برای هر $i$ یا $\mathrm{RM}(\phi \vee \gamma_i) \geq \alpha$ یا $\mathrm{RM}(\psi \vee \gamma_i) \geq \alpha$. یکی از دو مورد ذکر شده برای نامتناهی $i$ رخ می‌دهد؛ بی کاسته شدن از کلیت فرض کنیم $\mathrm{RM}(\phi \vee \gamma_i) \geq \alpha$ برای نامتناهی $i$. از این نتیجه می‌شود که $\mathrm{RM}(\phi) \geq \alpha$. $\square$