۵.۲ جلسه‌ی هیجدهم

۱.۵.۲ تئوری‌های پایدار

در جلسه‌ی قبل گفتیم که در هر مدلی که در یک زبان اسکولمیزه، توسط یک دنباله‌ی بازنشناختنیِ با اندیس در یک مجموعه‌ی خوشترتیب تولید شود، روی هر مجموعه‌ی شمارا، تعداد تایپهایی که برآورده می‌شوند حداکثر شماراست.

لم ۱۷۲: برای هر کاردینالِ دلخواهِ κ تئوریِ T دارای مدلی چون $\mathfrak{M}$ است به طوری که $|M| = \kappa$ و برای هر $A \subseteq M$ تعداد تایپهایِ روی A که در M محقق می‌شوند، حداکثر شماراست.

اثبات. در جلسه‌ی قبل ثابت کردیم که اگرچنانکه $(I, \leq)$ خوشترتیب باشد و $(a_i)_{i \in I}$ دنباله‌ای باشد بازنشناختنی، آنگاه در $\mathfrak{M} = S_{EM}(a_i | i \in I)$ روی هر مجموعه‌ی شمارا حداکثر شمارا تایپ برآورده می‌شوند. کافی است قرار دهیم $I = (\kappa, \leq)$. در این صورت $|S_{EM}(a_i | i \in I)| = \kappa$.
□

تئوریهای پایدار

تعریف ۱۷۳: تئوریِ T را ω **پایدار** [۱۲] می‌خوانیم هرگاه برای هر مدلِ شمارای $T \models \mathfrak{M}$ مجموعه‌ی $S_1(M)$ (=مجموعه‌ی همه‌ی تایپهای با پارامتر در M) شمارا باشد.

یادآوری ۱۷۴: اگر M شمارا باشد، تعداد تایپهای با پارامتر در M حداقل برابر با $\aleph_0$ است. قبلاً ثابت کرده‌ایم که اگر تعداد تایپها از $\aleph_0$ بیشتر باشد، آنگاه برابر با $2^{\aleph_0}$ است.

تمرین ۱۷۵: نشان دهید که ACF یک تئوریِ ω پایدار است.

تمرین ۱۷۶: نشان دهید که تئوری فضاهای برداریِ روی یک میدانِ شمارای F یک تئوریِ ω پایدار است.

هر دو مثالِ بالا، $\aleph_1$ جازم هستند و بعداً ثابت خواهیم کرد که هر تئوریِ $\aleph_1$ جازم، ω پایدار است.

تمرین ۱۷۷: نشان دهید که اگر در تئوریِ T یک ترتیبْ قابل تعریف باشد، این تئوری ω پایدار نیست.

[۱۲] ω-stable

تعریف ۱۷۸: برای $\kappa > \aleph_0$ تئوریِ T را κ **پایدار** می‌خوانیم هرگاه برای هر مدلِ $T \models \mathfrak{M}$ با $|M| = \kappa$ داشته باشیم $|S_1(M)| = \kappa$. تئوری T را **پایدار** می‌خوانیم هرگاه $\kappa \geq \aleph_0$ موجود باشد، به طوری که این تئوری κ پایدار باشد.

تمرین ۱۷۹: تئوریِ T پایدار است اگروتنها دارای ویژگی ترتیبی نباشد (یعنی هیچ ترتیبی در آن کُد نشود؛ در این باره در کلاس آموختال صحبت خواهیم کرد).

تمرین ۱۸۰: اگر T یک تئوریِ ω پایدار باشد، آنگاه برای هر $\kappa > \aleph_0$ این تئوری κ پایدار است.

انحراف از بحث. به طور کلی بنا به قضیه‌ای از شلاخ، یکی از حالات زیر برقرار است.

۱. برای هیچ کاردینالِ κ تئوریِ T، κ پایدار نیست.

۲. به ازای هر $\kappa \geq \aleph_0$ تئوریِ T، κ پایدار است. (معادلاً تئوری یادشده ω پایدار است.)

۳. به ازای هر $k > 2^{\aleph_0}$ تئوری T، κ پایدار است (به بیان دیگر، این تئوری، فوق پایدار است).

۴. به ازای هر کاردینالِ λ که $\lambda = \lambda^{\aleph_0}$ تئوریِ T، λ پایدار است (به طور محدود، پایدار است).

به طور ناشمارا جازم $\Leftarrow$ ωپایدار.

قضیه ۱۸۱: اگر تئوریِ T در یک کاردینالِ ناشمارا جازم باشد، ω پایدار است.

اثبات. فرض کنید که $\kappa \geq \aleph_0$ و تئوری یادشده κ جازم است. نیز فرض کنید به برهان خلف که برای مدلِ شمارای $\mathfrak{M}$ داریم $|S_1(\mathfrak{M})| \geq \aleph_1$. بنا به لمِ لونهایم‌اسکولم و بنا به ویژگی ادغام، مدلی چون $T \models \mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$ موجود است به طوری که $|N| = \kappa$ و در N حداقل به تعدادِ $\aleph_1$ عنصر موجود است که تایپهای آنها روی M دو به دو متمایزند (این گفته را ثابت کنید). از طرفی بنا به لمِ ۱۷۲ تئوری یادشده دارای مدلی است از اندازه‌ی κ مانند $\mathfrak{N}'$ به طوری که روی هر زیرمجموعه‌ی شمارای آن حداکثر شمارا تایپ موجود است. پس $\mathfrak{N}' \ncong \mathfrak{N}$، که این خلافِ κ جازم بودن است (در دو مدل ایزومرف ویژگی‌های مرتبه‌ی دوم نیز حفظ می‌شود). □

۲.۵.۲ تئوری‌های کاملاً متعالی و مرتبه‌ی مُرلی

مفهومِ ω پایدار بودن مفهومی جهانی است؛ یعنی، حداقل در تعریف، به فرمول خاصی وابسته نیست. در نظریه‌ی مدل بسیار پیش می‌آید که مفهومی جهانی، مفهومی موضعی را نتیجه دهد یا با آن معادل شود. در زیر خواهیم دید که ω پایدار بودن، کاملاً متعالی بودن را نتیجه می‌دهد، که آن مصداقی از مفاهیم موضعی است.

در تئوریهای کاملاًمتعالی، که در زیر به طور دقیق تعریف شده‌اند، به هر مجموعه‌ی تعریف‌پذیر می‌توان یک «رتبه» با مقادیر اردینالی نسبت داد. با کمک این رتبه، تایپها و مفهوم «استقلال» مدیریت می‌شوند.

یادآوری ۱۸۲: اگر $\mathfrak{M} \models T$، مجموعه‌ی $A \subseteq M^k$ را تعریف‌پذیرِ با پارامتر می‌خوانیم هرگاه فرمولِ $\phi(\bar{x}, \bar{b})$ چنان موجود باشد که

$$A = \{\bar{c} \in M^k | \mathfrak{M} \models \phi(\bar{c}, \bar{b})\}.$$

در ادامه، هدفمان تعریف مرتبه‌ی مُرلی روی همه‌ی مجموعه‌های تعریف‌پذیر است. مقادیر مرتبه‌ی یادشده در $Ord \cup \{\infty\} \cup \{-۱\}$ خواهند بود. معمولاً بی‌آنکه ابهامی رخ دهد، مرتبه‌ی مرْلیِ مجموعه‌ای چون A را که با فرمولی چون $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ تعریف می‌شود، با $\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(\phi(\bar{x}, \bar{a}))$ یا $\mathrm{RM}(A)$ نشان می‌دهیم. نیز، فعلاً مرتبه‌ی مُرلی را در یک مدلِ مشخصِ $\mathfrak{M}$ تعریف می‌کنیم. خواهیم گفت $\mathrm{RM}(A)^{\mathfrak{M}} = \alpha$ هرگاه $RM(A)^{\mathfrak{M}} \geq \alpha$ و $\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(A) \ngeq \alpha + ۱$. پس کافی است، $\mathrm{RM}(A) \geq \alpha$ را برای هر اردینالِ دلخواهِ α در زیر تعریف کنیم. ماهیت چنین تعریفی، علی‌القاعده استقرائی خواهد بود. در زیر، مجموعه‌های مورد اشاره، تعریف‌پذیر با پارامتر در مدلِ M هستند.

تعریف ۱۸۳:

۱. $\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(A) \geq ۰$ اگروتنهااگر $A \neq \emptyset$.

۲. اگر β اردینالی حدی باشد، آنگاه $\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(A) \geq \beta$ هرگاه $\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(A) \geq \alpha$ برای هر $\alpha < \beta$.

۳. $\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(A) \geq \alpha + ۱$ اگروتنهااگر مجموعه‌های دوبه‌دومجزای $(A_i)_{i \in \omega}$ چنان موجود باشند که برای هر i، $A_i \subseteq A$ و $\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(A_i) \geq \alpha$.

تعریف ۱۸۴:

$$\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(A)=\begin{cases}\alpha & \alpha=\min\{\beta|\,\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(A)\not\geq\beta+1\}\\ \infty & \forall\beta\quad \mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(A)\geq\beta.\end{cases}$$

تعریف ۱۸۵: تئوریِ T را **کاملاً متعالی**[13] می‌خوانیم هرگاه برای هر مدلِ $\mathfrak{M}\models T$ و هر فرمولِ $\phi(\bar{x},\bar{a})$ که در آن $\bar{a}\in M$ داشته باشیم $\mathrm{RM}(\phi(\bar{x},\bar{a}))\in Ord$.

به بیان دیگر، در یک تئوری کاملاً متعالی، هر فرمولْ دارای مرتبه‌ی مُرلی است.

تمرین ۱۸۶: برای کاملاً متعالی بودن کافی است شرط بالا برای یک مدلِ ω اشباع برقرار باشد.

مثال ۱۸۷: در زبانِ $L=\{E\}$ تئوریِ یک رابطه‌ی هم‌ارزیِ دارای نامتناهی کلاس، و هر کلاسْ نامتناهی را T بنامید.

- $\mathrm{RM}(x=a)=0$.
- $\mathrm{RM}(E(x,a))=1$.
- $\mathrm{RM}(x=x)=2$.

تمرین ۱۸۸: برای هر $\alpha\in Ord$ یک تئوریِ T معرفی کنید که در آن $\mathrm{RM}(x=x)=\alpha$.

[13] totally transcendental