۴.۲ جلسه‌ی هفدهم

یکی از سودمندیهای مدلهای اهغن‌فُیشت موستفسکیِ تولیدشده توسط دنباله‌های بازنشناختنی، که در اثباتهای بعدی بسیار به کارمان خواهد آمد، این است که در آنها تایپهای زیادی برآورده نمی‌شوند.

لم ۱۶۸: فرض کنید که I مجموعه‌ای خوشترتیب باشد، $(a_i)_{i\in I}$ دنباله‌ای بازنشناختنی، و $\mathfrak{M}$ مدلِ اسکولمی تولیدشده توسط دنباله‌ی یادشده. برای هر مجموعه‌ی شمارای $A \subseteq M$، حداکثر تعدادِ شمارا تایپِ‌روی A، در M محقق می‌شوند.

اثبات. نخست لم بالا را در حالت خاصِ $A = (a_i)_{i\in I_\cdot} \subseteq (a_i)_{i\in I}$ اثبات می‌کنیم. نیز نخست ادعا می‌کنیم که در این حالت

$$|\{\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_i/A)|i\in I\}| \leq \aleph_\cdot.$$

توجه کنید که اگر $i, j \in I_\cdot$ وضعیت ترتیبیِ یکسانی نسبت به $I_\cdot$ داشته باشند، آنگاه a_i, a_j تایپ یکسانی روی A دارند؛ به بیان دیگر اگر $\mathrm{qftp}_{DLO}(i/I_\cdot) = \mathrm{qftp}_{DLO}(j/I_\cdot)$ آنگاه $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_i/A) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_j/A)$. علت این امر ساده است؛ برای هر $i_\cdot, \dots, i_k \in I_\cdot$ اگر وضع ترتیبیِ i, j نسبت به این دنباله یکسان باشد، آنگاه وضعیت ترتیبی دو دنباله‌ی $i, i_\cdot, \dots, i_k$ و $j, i_\cdot, \dots, i_k$، نیز یکسان است؛ که این بنا به بازنشناختنی بودنِ دنباله‌ی $(a_i)_{i\in I}$ نتیجه می‌دهد که

$$\mathfrak{M} \models \phi(a_i, a_{i_\cdot}, \dots, a_{i_k}) \leftrightarrow \phi(a_j, a_{i_\cdot}, \dots, a_{i_k})$$

حالات مخلتفی که i از لحاظ ترتیبی نسبت به $I_\cdot$ می‌تواند داشته باشد، به صورت زیر است.

- در $I_\cdot$ باشد (شمارا حالت).
- از تمام عناصرِ $I_\cdot$ بزرگتر باشد. (یک حالت)
- از تمام عناصرِ $I_\cdot$ کوچکتر باشد (یک حالت).
- از برخی از عناصرِ $I_\cdot$ کوچکتر باشد و از برخی دیگر بزرگتر (ادعا: شماراحالت)

حال به محاسبه‌ی تعداد حالات در مورد آخر می‌پردازیم. طبیعتاً تعداد آن حالات برابر است با تعداد شکافها در مجموعه‌ی $I_\cdot$. شهود ما عموماً ما را بدین تصور وامی‌دارد که تعداد شکافها در یک

مجموعه‌ی مرتبِ شمارا، ناشماراست. این شهود در اینجا کار نمی‌کند و فرض خوشترتیب بودن مجموعه‌ی I در اینجا به کار می‌آید.

قرار دهید $I^i = \{k \in I_\circ | k > i\}$. بنا به خوشترتیبی، $\min I^i$ موجود است. برای هر $i, j \in I$ داریم $I^i = I^j$ اگروتنهااگر $\min I^i = \min I^j$. پس تعداد شکافهای اینچنین، بنا به شمارا بودنِ $I_\circ$ شماراست.

تا اینجا ثابت کرده‌ایم که تعداد تایپهای تک متغیره‌ی به صورت $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_i/A)$ حداکثر شماراست. همین گفته درباره‌ی تایپهای n متغیره نیز برقرار است. تعداد این تایپها نیز برابر با تعداد حالات ترتیبیِ مجموعه‌های $i_\circ, \ldots, i_n$ از اعضای I است نسبت به $I_\circ$. به بیان دیگر اگر $i_\circ, \ldots, i_n$ و $j_\circ, \ldots, j_n$ وضعیت ترتیبی یکسانی نسبت به $I_\circ$ داشته باشند آنگاه

$$\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_{i_\circ}, \ldots, a_{i_n}) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_{j_\circ}, \ldots, a_{j_n}).$$

تعداد حالات ترتیبی متصوَر برای $i_\circ, \ldots, i_n$ نسبت به $I_\circ$ نیز شماراست؛ زیرا تعداد حالات ترتیبی آنها نسبت به هم متناهی است، و تعداد حالات ترتیبی هر یک نسبت به $I_\circ$ شماراست. پس تا اینجا ثابت کرده‌ایم که تعداد تایپهای به شکلِ $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_{i_\circ}, \ldots, a_{i_n})/A)$ شماراست.

می‌خواستیم تعداد تایپهای برآورده شونده در M را بیابیم. می‌دانیم که عناصر M به شکل زیر هستند:

$$M = \{t^{\mathfrak{M}}(a_{i_\circ}, \ldots, a_{i_n}) | i_\circ, \ldots, i_n \in I, \text{ ترمی اسکولمی } t\}$$

دوباره معلوم است که اگر $\mathrm{qftp}_{DLO}(i_\circ, \ldots, i_n/I_\circ) = \mathrm{qftp}_{DLO}(j_\circ, \ldots, j_n/I_\circ)$ آنگاه

$$\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(t^{\mathfrak{M}}(a_{i_\circ}, \ldots, a_{i_n})/A) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(t^{\mathfrak{M}}(a_{j_\circ}, \ldots, a_{j_n})/A)$$

پس تعداد تایپها روی A در حالتی که $A \subseteq (a_i)_{i \in I}$ شماراست.

همان بحث بالا برای اثبات این که تعداد تایپهای روی هر $A \subseteq M$ شماراست کار می‌کند. فرض کنیم

$$A = \{t^{\mathfrak{M}}(a_{i_\circ}, \ldots, a_{i_k}) | i_\circ, \ldots, i_k \in I_\circ, t \in T\}$$

که در آن T مجموعه‌ای است از ترمها و $I_\circ \subseteq I$. تعداد تایپهای برآورده شونده در M روی A کمتر یا مساوی تعداد تایپها روی مجموعه‌ی $A' = \{a_i | i \in I_\circ\}$ است؛ و آنْ شماراست. $\square$

بحث جدید، قضیه‌ی مُرلی

همچنان تئوریِ T را شمارا، کامل و فاقد مدل متناهی فرض کرده‌ایم. فرض کنید $\kappa > \aleph_0$ یک کاردینال نامتناهی باشد.

تعریف ۱۶۹: تئوریِ T را κ **جازم** [۱۱] می‌خوانیم هرگاه هر دو مدلِ آن از اندازه‌ی κ با هم ایزومرف باشند. در حالتی که $\kappa = \aleph_0$ تئوری دارای شرط یادشده را $\aleph_0$ جازم می‌خوانیم. تئوریِ T را به **جازم‌درکاردینالی‌نامتناهی** می‌خوانیم هرگاه در یک کاردینالِ ناشمارای κ جازم باشد.

همانگونه که بارها گفته‌ایم، هدف نهایی این درس اثبات قضیه‌ی زیر است:

گزاره ۱۷۰ (مُرلی): اگر T جازم‌درکاردینالی‌ناشمارا باشد، آنگاه در تمامِ کاردینالهای $\kappa \geq \aleph_0$، جازم است.

مثال ۱۷۱: فرض کنید V یک فضای برداری باشد روی یک میدان شمارا. اگر V دارای یک پایه‌ی متناهی یا شمارا باشد، آنگاه V شماراست. از این رو، دو فضای برداری شمارا لزوماً با هم ایزومرف نیستند (شاید یکی دارای بعد n و دیگری دارای بعد $m \neq n$ باشد). برای این که اندازه‌ی V ناشمارا شود، نیازمند پایه‌ای ناشمارا هستیم. در واقع

$$|V| = \aleph_0 \times \dim(V) = \max\{\aleph_0, \dim(V)\}.$$

از طرفی، هر دو فضای برداریِ دارای بُعدِ مساوی با هم ایزومرفند. پس هر دو فضای برداریِ از اندازه‌ی $\kappa > \aleph_0$ از آنجا که هم‌بُعدند با هم ایزومرفند.

[۱۱] κ-categorical