## ۳.۲ جلسه‌ی شانزدهم، توابع اسکولمی و اِسْکولِمیزه کردن

فرض کنید که $\mathfrak{M}$ یک $L$ ساختار باشد و $A$ زیرمجموعه‌ای از آن. می‌دانیم که $\langle A\rangle$، زیرساختار تولیدشده توسطِ $A$، مجموعه‌ی متشکل از همه‌ی $t^{\mathfrak{M}}(a_1,\dots,a_n)$ هاست. این مجموعه، لزوماً یک زیرساخت مقدماتی نیست؛ برای مثال زیرساخت تولید شده توسطِ ۱ در ساختارِ $\langle \mathbb{Q},+,-,\cdot\rangle$ برابر است با $\langle \mathbb{Z},+,-,\cdot\rangle$. با این همه، در مثال یادشده، اگر در زبان توابعِ $f_{\frac{1}{n}}(x)=\frac{x}{n}$ را می‌داشتیم، آنگاه زیرساخت تولیدشده توسط عنصر ۱ برابر می‌شد با خودِ $\langle \mathbb{Q},+,-,\cdot\rangle$، که مسلماً زیرساختی مقدماتی از ساختار یادشده است.

بنا به لمِ تارسکی، اگر $\mathfrak{N}\subseteq\mathfrak{M}$ آنگاه $\mathfrak{N}\prec\mathfrak{M}$ اگروتنهااگر برای هر فرمولِ بدونِ سور $\phi(x,\bar{a})\in L_M$، اگر $\mathfrak{N}\models\exists x\quad\phi(x,\bar{a})$ آنگاه

$$\mathfrak{N}\models\exists x\in M\quad\phi(x,\bar{a}).$$

اگر ترمهایی مانند $t$ در زبان داشتیم، چنانکه از

$$\mathfrak{N}\models\exists x\quad\phi(x,\bar{a})$$

نتیجه می‌شد

$$\mathfrak{N}\models\phi(t(\bar{a}),\bar{a}),$$

آنگاه دو ساختار مورد نظر، لوازم لم تارسکی را می‌داشتند.

تعریف ۱۶۳ (ویژگی اسکولم): گوئیم در تئوری $T$ توابع اسکولم تعبیه شده‌اند [۸]، هرگاه برای هر فرمولِ $\phi(x,\bar{y})$ ترمِ $t_\phi(\bar{y})$ چنان موجود باشد که

$$T\models\forall\bar{y}\quad\left(\exists x\quad\phi(x,\bar{y})\to\phi(t_\phi(\bar{y}),\bar{y})\right).$$

توجه کنید که اگر $|\bar{y}|=0$ آنگاه ترم مورد نظر باید یک ثابت باشد؛ یعنی

$$T\models\exists x\phi(x)\to\phi(c_\phi).$$

[8] $T$ has built-in Skolem functions.

گزاره ۱۶۴: اگر $T$ یک تئوری سازگار در زبانِ $L$ باشد، زبانِ $L'$ شامل $L$ و تئوری $T'$ در آن شاملِ $T$ چنان موجودند که $T'$ دارای توابع اسکولمیِ تعبیه‌شده است.

*اثبات.* قرار دهید $L_\circ = L$ و $T_\circ = T$ و فرض کنید $L_1$ زبانی باشد که در آن برای هر $L_\circ$ فرمولِ بدون سورِ $\phi(x, \bar{y})$ یک نماد تابعیِ $f_\phi$ داریم. نیز تئوریِ $T_1$ را اجتماعِ $T_\circ$ بگیرید با همه‌ی جمله‌های

$$\forall \bar{y} \left( \exists x \phi(x, \bar{y}) \to \phi(f_\phi(\bar{y}), \bar{y}) \right)$$

که در آن $\exists x \phi(x, \bar{y}) \in T_\circ$. تئوریِ $T_1$ دارای مدل است؛ برای تعبیر تابعِ $f$ کافی است هر $f_\phi(\bar{y})$ را عنصری بگیریم که ضامنِ $\exists x \quad \phi(x, \bar{y})$ باشد. بدین ترتیب، زبانِ $L_{n+1}$ را زبانی می‌گیریم که از اجتماعِ $L_n$ با نمادهای تابعیِ $f_\phi$ برای هر $\phi(x, \bar{y}) \in L_n$ حاصل شده است و فرض می‌کنیم تئوریِ $T_{n+1}$ از اجتماعِ $T_n$ با جملات زیر حاصل شده باشد:

$$\forall \bar{y} \left( \exists x \phi(x, \bar{y}) \to \phi(f_\phi(\bar{y}, \bar{y}) \right).$$

برای هر $\phi(x, \bar{y}) \in L_n$. تئوریِ $T_\omega = \bigcup_{i<\omega} T_i$ در زبانِ $L_\omega = \bigcup_{i<\omega} L_i$ تئوریِ مورد نظر ماست. $\square$

تعریف ۱۶۵: تئوریِ $T_\omega$ را اسکولمیزشِ ( یا اسکولمیزه‌شده‌ی) [۹] $T$ می‌خوانیم و آن را با $T_{skolem}$ نشان می‌دهیم.

تمرین ۱۶۶:

۱. نشان دهید که $T_{skolem}$ سورها را حذف می‌کند.

۲. نشان دهید که به هنگِ $T_{skolem}$ همه‌ی جمله‌ها دارای معادل عمومیند (معادلی تنها دارای سور عمومی). به طور خاص، این تئوری دارای اصل‌بندی عمومی است.

۳. با استفاده اسکولمیزه‌سازی، و بدینسان تقلیل منطق مرتبه‌ی اول به منطق گزاره‌ها، اثباتی توپولوژیک برای قضیه‌ی فشردگی ارائه کنید.

فرض کنیم که تئوریِ $T$ دارای توابع اسکولمی باشد. دیدیم که برای هر مجموعه‌ی مرتبِ خطیِ $\langle I, \leq \rangle$ می‌توان دنباله‌ای بازنشناختنی چون $(a_i)_{i \in \omega}$ در مدلی از $T$ یافت. مدل تولیدشده توسطِ $a_i$ ها را با $S_{EM}(a_i | i \in I)$ نشان می‌دهیم و آن را پوش اسکولمیِ (یا غلاف اسکولمیِ) [۱۰] این دنباله

[۹] Skolemization
[۱۰] Skolem hull

می‌خوانیم. (با توجه به نقش توابع اسکولمی نشان دهید که) داریم

$$S_{EM}(a_i|i \in I) \prec \mathfrak{M}$$

و به ویژه

$$S_{EM}(a_i|i \in I) \models T.$$

تمرین ۱۶۷: فرض کنید $f : I \to I$ یک اتومرفیسم ترتیبی باشد. نشان دهید که نگاشتِ $\hat{f} : S_{EM}(a_i|i \in I) \to S_{EM}(a_i|i \in I)$ با ضابطه‌ی $\hat{f}(t(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) = \hat{f}(t(a_{f(i_1)}, \ldots, a_{f(i_n)}))$ یک اتومرفیسم است.