۲.۲ جلسه‌ی پانزدهم، دنباله‌های بازنشناختنی

در جلسه‌ی قبل ثابت کردیم که:

یادآوری ۱۵۳ (رمزی): فرض کنیم X یک مجموعه‌ی متناهی باشد و $[X]^n$ گردایه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های n عضویِ آن. نیز فرض کنیم که یک رابطه‌ای هم‌ارزی روی $[X]^n$ داریم که تعداد کلاسهای آن متناهی است. آنگاه زیرمجموعه‌ای نامتناهی چون $X \subseteq Y$ چنان موجود است که همه‌ی اعضای $[Y]^n$ در یک کلاس واقع باشند.

تئوریِ T را کامل و زبانْ را شمارا انگاشته‌ایم.

تعریف ۱۵۴: گیریم $\mathfrak{M} \models T$ و $A \subseteq M$ و فرض می‌کنیم که $(I, \leq)$ یک مجموعه‌ی مرتب خطی باشد. دنباله‌ی $(a_i)_{i\in I}$ از اعضای M را نسبت به مجموعه‌ی $\Delta \subseteq L_A$ بازنشناختنی می‌خوانیم (یا آن را Δ بازنشناختنی می‌خوانیم) هرگاه برای هر دو دنباله‌ی $i_1 < i_2 < \ldots < i_n \in I$ و $j_1 < j_2 < \ldots < j_n \in I$ و هر فرمولِ $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in \Delta$ داشته باشیم

$$\mathfrak{M} \models \phi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \leftrightarrow \phi(a_{j_1}, \ldots, a_{j_n}).$$

اگر $\Delta = L_A$ آنگاه دنباله‌ی یادشده را بازنشناختنی (روی A) می‌خوانیم.[۵]

به بیان دیگر، دنباله‌ی $(a_i)_{i\in I}$ وقتی روی A بازنشناختنی است که در آن برای هر $i_1 < \ldots < i_n$ و $j_1 < \ldots < j_n$ داشته باشیم

$$\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_{i_1} \ldots a_{i_n}/A) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_{j_1} \ldots a_{j_n}/A).$$

باز به بیان دیگر، دنباله‌ی یادشده وقتی روی A بازنشناختنی است که هر تایپِ $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_{i_1} \ldots a_{i_n}/A)$ تنها به تایپِ بدون سورِ $\mathrm{qftp}_{DLO}(i_1, \ldots, i_n)$ بستگی داشته باشد. پس مثلاً اگر $(a_i)_{i\in\omega}$ روی A بازنشناختنی باشد، داریم

$$a_0 \equiv_A a_1 \equiv_A a_2 \ldots$$

$$a_0a_1 \equiv_A a_0a_2 \equiv_A a_0a_3 \ldots \equiv_A a_1a_2 \equiv_A a_1a_3 \ldots a_{240}a_{897} \ldots$$

$$a_0a_1a_2 \equiv_A a_0a_1a_3 \equiv_A a_1a_2a_3 \ldots \equiv a_{10}a_{50}a_{62} \equiv_A \ldots$$

[۵] چنین دنباله‌ای را می‌توان «تمییزناپذیر» یا «تشخیص‌ناپذیر» هم خواند. ترجیح من همان واژه‌ی بازنشناختنی است. درواقع یک دنباله‌ی این چنینْ از اعضایی تشکیل شده است که توسط تئوری از هم بازشناخته نمی‌شوند.

مثال ۱۵۵ (میدانهای بسته‌ی جبری): فرض کنیم $F \models ACF$. و $k \subseteq F$ زیرمیدانی از آن باشد. هر دنباله‌ی $(a_i)_{i\in\omega}$ از عناصرِ F که روی k متعالیند، روی k بازنشناختنی است.

برای اثبات گفته‌ی فوق، توجه کنید که برای هر $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ بنا به متعالی بودنِ عناصر دنباله داریم $k(a_1,\ldots,a_n) \cong k(a_{i_1},\ldots,a_{i_n}) \cong k(X_1,\ldots,X_n)$. بنا به حذف سور، این ایزومرفیسم در سامانه‌ای رفت‌وبرگشتی واقع است که همتاییِ $a_1\ldots a_n$ و $a_{i_1}\ldots a_{in}$ را روی k ضامن می‌شود.

به زبان ساده‌تر، توجه کنید که بنا به حذف سور، دو دنباله‌ی $a_0\ldots a_n$ و $a_{i_0}\ldots a_{in}$ وقتی و تنها وقتی روی A همتایند که برای هر چندجمله‌ایِ $p(x_0,\ldots,x_n) \in k[X_0,\ldots,X_n]$ داشته باشیم

$$p(a_0,\ldots,a_n) = 0 \Leftrightarrow p(a_{i_0},\ldots,a_{in}) = 0;$$

یعنی وقتی همه‌ی چندجمله‌ای‌ها درباره‌ی آنها هم‌نظر باشند. برقراری عبارت بالا برای دنباله‌ی ما واضح است؛ زیرا بنا به متعالی بودن عناصرِ دنباله، برای هر $i_0,\ldots,i_n$ و هر چندجمله‌ایِ چنان، داریم

$$p(a_{i_0},\ldots,a_{in}) \neq 0.$$

مثال ۱۵۶ (میدانهای بسته‌ی حقیقی): گیریم $\mathbb{R}^*$ توسیع (ناستانداردِ) مقدماتی‌ای از $\langle \mathbb{R},+,\cdot,0,1,\leq\rangle$ باشد. بنا به حذف سور داریم $\mathrm{tp}(a/\mathbb{Q}) = \mathrm{tp}(b/\mathbb{Q})$ اگروتنهااگر a,b در نامساوی‌های یکسانی به شکلِ $f(x) > 0$ صدق کنند که $f(x) \in \mathbb{Q}[X]$. از طرفی، با دستکاریهای جبری می‌توان نشان داد که $f(x) > 0$ معادل است با عبارتی چون $x \in (a_1,b_1) \cup \ldots \cup (a_n,b_n) \cup \{c_1,\ldots,c_m\}$ که در آن نقاط پایانی بازه‌ها را می‌توان به صورت تعریف‌پذیر (حتی تنها به صورت چند جمله‌ای) بر حسب ضرایبِ f محاسبه کرد. این ویژگی، **ترتیب‌کمینگی** [6] نام دارد. بنا به ترتیب‌کمینگی، هر زیرمجموعه‌ی تعریف‌پذیرِ یک‌بعدی از $\mathbb{R}^*$ اجتماعی است متناهی از بازها و نقطه‌ها. پس یک دنباله‌ی $(a_i)_{i\in\omega}$ از عناصرِ $\mathbb{R}^*$ روی $\mathbb{Q}$ بازنشناختنی است هرگاه عناصرِ آن همه در یک شکاف از $\mathbb{Q}$ واقع باشند و دنباله‌ی یادشده اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی باشد.

[6] o-minimality

توجه کنید که در خودِ $\mathbb{R}$ نمی‌توان دنباله‌ای بازنشناختنی حتی روی مجموعه‌ی تهی یافت. اگر قرار باشد که (a_n) بازنشناختنی باشد، برای هر $\alpha \in \mathbb{Q}$ از آنجا که α را می‌توان به صورت $\frac{a}{b}$ در تئوری نوشت، باید داشته باشیم $a_i < \alpha \Leftrightarrow a_j < \alpha$. این در حالی است که برای هر دو جمله‌ی $a_i < a_j$ در دنباله‌ی مورد نظر، عنصری چون $\alpha \in \mathbb{Q}$ یافت می‌شود که $a_i < \alpha < a_j$.

مثال ۱۵۷ (ترتیبهای خطی چگال): از آنجا که DLO سورها را حذف می‌کند، هر دنباله‌ی صعودی در هر مدل آن، روی تهی بازنشناختنی است. روی یک مجموعه‌ی داده‌شده‌ی A یک دنباله تنها در صورتی بازنشناختنی است که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد و اعضایش همه در شکاف یکسانی واقع شده باشند.

مثال ۱۵۸: اعضای یک دنباله‌ی بازنشناختنی نمی‌توانند جبری باشند. در واقع اگر جمله‌ی اول جبری باشد، تایپِ آن تنها توسط تعداد متناهی عنصر برآورده می‌شود. از طرفی همه‌ی بقیه‌ی دنباله نیز تایپ آن را برمی‌آورند. پس دنباله‌ی یادشده باید متناهی باشد (دنباله‌های بازنشناختنی را نامتناهی فرض کرده‌ایم).

مثال ۱۵۹: اگر دنباله‌ی (a_i) روی A بازنشناختنی باشد هر تصویر آن تحت اتومرفیسمی چون $f \in \mathrm{Aut}(M/A)$ نیز روی A بازنشناختنی است.

مثال ۱۶۰: اگر K یک فضای برداری باشد و $\mathrm{a} = (a_i)_{i\in\omega}$ پایه‌ای نامتناهی از آن، آنگاه a دنباله‌ای بازنشناختنی است.

در ادامه، به مسئله‌ی وجود دنباله‌های بازنشناختنی می‌پردازیم. در زیر نشان داده‌ایم که Δ ـ بازنشناختنی بودن، برای یک مجموعه‌ی متناهیِ Δ از فرمولها، به آسانی حاصل‌شدنی است.

گزاره ۱۶۱: گیریم Δ مجموعه‌ای متناهی باشد از فرمولها و $(I, \leq)$ مجموعه‌ای مرتبِ خطی و $X = (a_i)_{i\in I}$ دنباله‌ای دلخواه در یک مدلِ M. آنگاه X دارای زیردنباله‌ای Δ ـ بازنشناختنی (مانند $(b_j)_{j\in\omega}$) است.

اثبات. گیریم $\Delta = \{\phi_1, \dots, \phi_k\}$ که در آن متغیرهای آزادْ $x_1, \dots, x_n$ هستند، و قرار می‌دهیم

$$A = \{\psi(\bar{x}) | \psi = \bigwedge_{i=1}^{k} \theta_i, \theta_i \in \{\phi_i, \neg\phi_i\}\}.$$

مجموعه‌ی A متناهی است و برای هر $\bar{\alpha} \in M$ فرمول یکتایی چون $\psi \in A$ موجود است به طوری که $\models \psi(\bar{\alpha})$. روی $[X]^n = \{\{a_{j_1} < \dots < a_{jn}\} | j_1 < \dots < j_n \in I\}$ رنگ‌آمیزیِ

$f(\{a_{j۱} < \ldots, a_{jn}\}) = \{\psi(\bar{x}) | \models \psi(\{a_{j۱} < \ldots < a_{jn}\})\}$ را در نظر می‌گیریم. بنا به قضیه‌ی رمزی، X زیرمجموعه‌ای متناهی چون Y دارد که همه‌ی زیرمجموعه‌های n عضوی آن همرنگند. دنباله‌ی Y همان دنباله‌ی مورد نظر است. □

بیان دیگری برای اثبات. روی $[X]^n$ رابطه‌ی هم‌ارزی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\{a_۱ < \ldots < a_n\} \cong \{b_۱ < \ldots < b_n\} \Leftrightarrow \mathrm{tp}_\Delta(\bar{a}) = \mathrm{tp}_\Delta(\bar{b}).$$

تعدادِ کلاسهای رابطه‌ی بالا (تعداد رنگها) متناهی است. زیرمجموعه‌ای از X که از اعمال لم رمزی حاصل می‌شود، دنباله‌ی مورد نظر است. □

بنا به گزاره‌ی بالا، می‌توان از اندرون یک دنباله‌ی شمارا، یک دنباله‌ی بازنشناختنی نسبت به تعداد متناهی فرمول بیرون کشید. بنا به قضیه‌ی اردوش ـ رادو (که صورتی کلی‌تر است از رمزی و در این درس بدان نخواهیم پرداخت) برای هر مجموعه‌ی (نه لزوماً متناهی) Δ از فرمولها اگر اندازه‌ی دنباله‌ای که با آن شروع می‌کنیم به قدر کافی نسبت به اندازه‌ی Δ بزرگ باشد، می‌توان از دلِ آن دنباله‌ای با اندازه‌ی شمارا و در عین حال Δ ـ بازنشناختنی بیرون کشید.

روش معمول دیگر (غیر از روش استفاده از لم اردوش ـ رادو) برای یافتن دنباله‌های بازنشناختنی، آمیختن لم رمزی و لم فشردگی است. در زیر صورتی ساده از اعمال این روش را ارائه کرده‌ایم. در جلسات آینده صورتی کارگشاتر از قضیه‌ی زیر را بررسی خواهیم کرد که در آن ویژگی‌های دنباله‌ی بازنشناختنیِ موردنظر را (به صورت موضعی حول هر فرمول) تحت کنترل بیشتری درخواهیم آورد. [۷]

قضیه ۱۶۲: فرض کنیم I مجموعه‌ای باشد مرتب خطی. در آن صورت مدلِ $\mathfrak{M} \models T$ و در آن دنباله‌ای بازنشناختنی چون $(a_i)_{i\in I}$ موجودند.

اثبات. نخست بسط زبانیِ $L' = L \cup \{c_i\}_{i\in I}$ را از L توسط ثوابت جدید در نظر بگیرید. تئوریِ زیر را در نظر بگیرید:

$$T' = T \cup \{(c_i)_{i\in I} \text{ دنباله‌ای بازنشناختنی است}\}$$

[۷] جزوه‌ی «سادگی به زبان ساده» تألیف نویسنده‌ی دوم را برای دانستن تفاوت دنباله‌های حاصل از لم رمزی و لم اردوش رادو مطالعه بفرمایید.

به بیان دقیقتر، T' از اجتماعِ T با مجموعه‌های زیر از جملات حاصل شده است:

$$\{\phi(c_i) \leftrightarrow \phi(c_j)\}_{i,j\in I,\phi(x)\in L}$$

$$\vdots$$

$$\{\phi(c_{i1},\ldots,c_{in}) \leftrightarrow \phi(c_{j1},\ldots,c_{jn})\}_{\phi(x_1,\ldots,x_n)\in L, i1<\ldots<i_n, j1<\ldots<jn\in I}$$

کافی است نشان دهیم که T' دارای مدل است، و برای آن کافی است مدل داشتن هر بخش متناهی از T' را ثابت کنیم. هر بخش متناهی از T' را می‌توان به مجموعه‌ای از جملات گستراند که بیانگرِ بازنشناختنی بودن یک دنباله‌ی متناهی، برای یک مجموعه‌ی متناهیِ Δ از فرمولها هستند. گزاره‌ی ۱۶۱ مدل مورد نظر را فراهم می‌آورد. $\square$