فصل ۲

قضیه‌ی مُرلی

۱.۲ جلسه‌ی چهاردهم، لم رمزی

در فصل قبل و در جلسات آموختال، با یادگیریِ پیشنیازهای نظریه‌ی مدلی، ورزیدگی لازم را برای ورود به بحث اصلی کسب کرده‌ایم. از این نقطه‌ی درس به بعد با یادگیریِ مقدمات پیشرفته‌تری به سمت بیان و اثبات قضیه‌ی مُرلی پیش خواهیم رفت. نخست، به طور خلاصه به تبیین ابزار ترکیباتی مورد نظر خود، یعنی قضیه‌ی رمزی می‌پردازیم.

عموماً در نظریه‌ی مدل، از قضیه‌ی رمزی [۱] و یا از تعمیمی از آن، به نام قضیه‌ی اردوش ـ رادو [۲] برای یافتن دنباله‌های بازنشناختنی استفاده می‌شود. دنباله‌های بازنشناختنی، که در جلسات بعد مفصلاً بدانها خواهیم پرداخت، دنباله‌هایی هستند که هر تعداد از اعضایشان، بسته به ترتیب قرارگیریشان در دنباله، از منظرِ تئوری مورد نظر، هم‌ارزش هستند. برای یافتن این چنین دنباله‌ای، عناصر یک دنباله‌ی دلخواه را، بسته به هم‌ارزش بودنشان نسبت به فرمولها، «رنگ‌آمیزی» می‌کنیم و با استفاده از لم رمزی، زیرمجموعه‌ای «تک‌رنگ» از این دنباله استخراج می‌کنیم.

[۱] Ramsey

[۲] Erdös - Rado

۱.۱.۲ لم رمزی

برای مجموعه‌ی دلخواهِ X و عدد طبیعیِ k تعریف می‌کنیم:

$$[X]^k = \{Y \subseteq X : |Y| = k\}.$$

برای هر عددِ طبیعیِ $n \geq ۱$، هر تابعِ

$$f : [X]^k \to n = \{۰, ۱, \dots, n - ۱\}$$

را یک **رنگ‌آمیزی** از زیرمجموعه‌های k عضویِ مجموعه‌ی X توسط n رنگ می‌خوانیم. مجموعه‌ی $Y \subseteq X$ را برای رنگ‌آمیزیِ f همگن (یا تکرنگ) می‌خوانیم هرگاه همه‌ی زیرمجموعه‌های k عضوی آن، تحتِ f رنگ یکسان داشته باشند؛ به بیان دیگر، هرگاه $f|_{[Y]^n}$ ثابت باشد. پس اگر Y مجموعه‌ای تکرنگ برایِ رنگ‌آمیزیِ f باشد، عددِ $n > i$ چنان موجود است که برای هر $Z \subseteq Y$ با $|Z| = n$ داریم $f(Z) = i$.

قضیه ۱۴۷ (رمزی): فرض کنید مجموعه‌ی نامتناهیِ X و اعدادِ $k, n \geq ۱$ داده شده باشند. برای هر رنگ‌آمیزیِ $f : [X]^k \to n$ یک مجموعه‌ی تکرنگِ نامتناهیِ $Y \subseteq X$ موجود است.

قضیه‌ی بالا، صورت نامتناهی لمِ رمزی است. عموماً در ترکیبیات، نخست صورت متناهی این لم را ثابت می‌کنند و از آن صورت نامتناهیش را نتیجه می‌گیرند، اما طرزفکرِ نظریه‌ی مدلی، ما را بر آن می‌دارد که همواره برای یافتن رابطه میان متناهی و نامتناهی از قضیه‌ی فشردگی استفاده کنیم.

یادآوری ۱۴۸: حکم قضیه‌ی بالا در نمادگذاری زیر خلاصه می‌شود:

$$\aleph_۰ \to (\aleph_۰)^n_k$$

پیش از اثبات قضیه به بیان چند مصداق آشنا از آن می‌پردازیم.

مثال ۱۴۹: در حالتِ $k = ۱$ قضیه‌ی رمزی همان اصل خانه‌ی کبوتری است: اگر نامتناهی عنصر در متناهی جایگاه قرار گرفته باشند،حداقل در یک جایگاه، نامتناهی عنصر جای گرفته است.

مثال ۱۵۰: فرض کنید (V, R) گرافی نامتناهی باشد. روی $[V]^۲$ یک رنگ‌آمیزی به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(\{x, y\}) = \begin{cases} ۱ & V \models R(x, y) \\ ۰ & V \models \neg R(x, y). \end{cases}$$

بنا به قضیه‌ی رمزی، یا زیرگرافی نامتناهی از گرافِ V موجود است که همه‌ی رأسهای آن دوبه‌دو به هم متصلند (زیرگراف کامل)، و یا زیرگرافی نامتناهی موجود است که هیچ یالی میان رأسهای آن وجود ندارد.

مثال ۱۵۱: با استفاده از قضیه‌ی رمزی ثابت کنید که هرگاه $(X, \leq)$ یک مجموعه‌ی مرتبِ خطی نامتناهی باشد، آنگاه X یا شامل یک دنباله‌ی صعودی نامتناهی و یا شامل یک دنباله‌ی نزولی نامتناهی است.

در ادامه، قضیه‌ی رمزی را با استقراء روی k ثابت کرده‌ایم.

اثبات قضیه‌ی رمزی. اگر $k = 1$ آنگاه قضیه‌ی رمزی همان اصل لانه‌ی کبوتری است. فرض کنیم حکم قضیه‌ی برای k برقرار باشد؛ یعنی برای هر n داشته باشیم:

$$\aleph_0 \to (\aleph_0)^n_k.$$

می‌خواهیم درستی آن را برای $k+1$ تحقیق کنیم. فرض کنیم که X مجموعه‌ای نامتناهی باشد و f یک رنگ‌آمیزی از زیرمجموعه‌های $k+1$ عضوی آن با n رنگ. بدون کاسته شدن از کلیت، مجموعه‌ی X را شمارا و دارای ترتیبِ $x_1 < x_2 < \dots$ فرض می‌کنیم. در ادامه دو دنباله‌ی $(y_i)_{i\in\omega}$ از عناصرِ X و $(n_i)_{i\in\omega}$ از اعضای $\{0, 1, \dots, n\}$ خواهیم ساخت و مجموعه‌ی مورد نظر را از میان عناصر دنباله‌ی اول استخراج می‌کنیم. قرار می‌دهیم $y_1 = x_1$.

رنگ‌آمیزی $f_1 : [X - \{x_1\}]^k \to n$ را با ضابطه‌ی $f_1(Z) = f(Z \cup \{x_1\})$ در نظر می‌گیریم. بنا به فرض استقراء، این رنگ‌آمیزی دارای یک مجموعه‌ی همگن به نامِ Y_1 است. قرار می‌دهیم $y_2 = \min Y_1$ و n_2 را رنگ مشترکِ همه‌ی زیرمجموعه‌های k عضویِ Y_1 فرض می‌کنیم. به همین ترتیب روی زیرمجموعه‌های k عضویِ $Y_1 - \{y_2\}$ رنگ آمیزیِ $f_2(Z) = f(Z \cup \{y_2\})$ را در نظر گرفته فرض می‌کنیم که Y_2 مجموعه‌ی همگنِ آن و n_3 رنگ مشترک زیرمجموعه‌های k عضویِ Y_2 باشند. نیز قرار می‌دهیم $y_3 = \min Y_2$. فرارونِد بالا را ادامه داده به عناصرِ

$$y_1 < y_2 < \dots$$

می‌رسیم. نیز داریم

$$Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \dots.$$

قرار دهید $Y' = \{y_۱, \dots\}$. هر زیرمجموعه‌ی $k+۱$ عضوی از Y' اگر شاملِ $y_۱$ باشد، به رنگِ $n_۲$ است و اگر شاملِ y_i باشد به رنگ $n_{i+۱}$. از آنجا که تعداد رنگها متناهی است، یکی از رنگها بی‌نهایت بار تکرار می‌شود و مجموعه‌ی y_i های متناظر این رنگ، همان مجموعه‌ی مطلوب ماست. □

قضیه ۱۵۲ (رمزی متناهی): برای اعداد طبیعیِ دلخواهِ n, m, k عددی طبیعی چون $r(n, m, k)$ موجود است، به طوری که

$$r(n, m, k) \to (m)^k_n;$$

یعنی بدان گونه که اگر X مجموعه‌ای با اندازه‌ی حداقل $r(n, m, k)$ باشد و f یک رنگ‌آمیزی از زیرمجموعه‌های k عضوی آن با استفاده از n رنگ، آنگاه زیرمجموعه‌ای از X با اندازه‌ی حداقل m یافت می‌شود که همه‌ی زیرمجموعه‌های k عضوی آن همرنگ هستند.

اثبات. به برهان خلف، گیریم اعدادِ m, n, k چنان موجود باشند که مجموعه‌ای با هیچ‌اندازه‌ی متناهی یافت نشود که اگر زیرمجوعه‌های k عضوی آن را n رنگ کنیم زیرمجموعه‌ای همگن و m عضوی پیدا شود. زبانِ $L = \{R_۱(v_۱, \dots, v_k), \dots, R_n(v_, \dots, v_k)\}$ و تئوری T را در آن با اصول زیر در نظر بگیرید:

$$\forall x_۱, \dots, x_k \quad R_i(x_۱, \dots, x_k) \to \bigwedge_{l \neq k \in \{۱, \dots, k\}} x_l \neq x_t \quad i \in \{۱, \dots, n\}$$

$$\forall x_۱, \dots, x_k \quad R_i(x_۱, \dots, x_k) \to R_i(x_{\sigma(۱)}, \dots, x_{\sigma(k)}) \quad \sigma \in \textbf{جایگشت}(k), i \in \{۱, \dots, n\}$$

$$\forall x_۱, \dots, x_k \quad \left(\bigwedge x_l \neq x_t \to \bigvee_{i=۱}^{n} R_i(x_۱, \dots, x_k)\right)$$

$$\forall x_۱, \dots, x_k \quad \neg \left(R_i(x_۱, \dots, x_k) \wedge R_j(x_۱, \dots, x_k)\right) \quad i \neq j.$$

بنابراین اگر $M \models T$ آنگاه هر k عنصر از آن توسط رابطه‌های $R_۱, \dots, R_n$ در کلاسِ یک رنگ قرار می‌گیرند (عناصر هم رنگ را در یک کلاس قرار داده‌ایم). جمله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\psi_m := \neg \left[\exists Y \quad |Y| \geq m \quad \wedge \quad \bigvee_i (\forall y_۱, \dots, y_k \in Y \quad R_i(y_۱, \dots, y_k))\right].$$

جمله‌ی ψ_m می‌گوید که هیچ مجموعه‌ی همگنی از اندازه‌ی حداقل m وجود ندارد. تئوریِ $T \cup \{\psi_m\}$ بنا به فرض، دارای مدلهای متناهیِ به‌اندازه‌ی‌دلخواه‌بزرگ، و بنا به فشردگی، دارای مدلی نامتناهی

است. وجود مدل نامتناهی برای این تئوری، معادل وجود یک رنگ‌آمیزی از زیرمجموعه‌های k عضوی یک مجموعه‌ی نامتناهی است که هیچ زیرمجموعه‌ی همگن نامتناهی‌ای برایش یافت نشود، و این لمِ رمزی نامتناهی را نقض می‌کند. $\square$

قضیه‌ی رمزیِ متناهی از حساب پئانو اثبات شدنی است؛ لیکن صورتی پیشرفته‌تر از آن [۳] هست که بنا به قضیه‌ای از پاریس و هرینگتون [۴] با آنکه در اعداد طبیعی درست است، از حساب پئانو قابل اثبات نیست. این صورتْ در واقع اولین مثال عینی برای ناتمامیت بوده است.

[۳] در این صورت روی مجموعه‌ی همگنِ Y قیدِ $|Y| > \min Y$ گذاشته می‌شود.

[۴] Paris, Harrington