۱۴ جلسه‌ی سیزدهم

یادآوری ۱۳۶: مدلِ $\mathfrak{M}$ را κ ـ همگن خواندیم هرگاه برای هر $\bar{a}$ و $\bar{b}$ با $|\bar{a}|,|\bar{b}| < \kappa$ اگر $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{b})$ آنگاه برای هر $c \in M$ عنصر $d \in M$ موجود باشد، به طوری که

$$\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}, c) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{b}, d).$$

به بیان دیگر، در یک مدلِ κ ـ همگن هر نگاشت مقدماتی میان دو زیرمجموعه‌ای از اندازه‌ی کمتر از κ در سامانه‌ای رفت‌وبرگشتی از نگاشتهای مقدماتی جزئی واقع می‌شود.

در پایان جلسه‌ی قبل گفتیم (و در زیر ثابت خواهیم کرد) که اگرچنانچه هر نگاشت مقدماتی در سامانه‌ای رفت‌وبرگشتی از نگاشتهای مقدماتی واقع شود، آنگاه هر نگاشت مقدماتی را می‌توان به یک اتومرفیسم گستراند:

گزاره ۱۳۷: اگر $\mathfrak{M}$ همگن باشد، قویاً همگن است.

اثبات. شمارشِ $M = (m_i)_{i<|M|}$ را برای M در نظر گرفته فرض کنید $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{b})$ و $|\bar{a}| = |\bar{b}| < |M|$. دنباله‌ی $\langle f_i | i < |M| \rangle$ را از نگاشتهای مقدماتی جزئی به طریق زیر می‌سازیم.

قرار می‌دهیم $f_\circ = \{(a_t, b_t) : t < |\bar{a}|\}$. اگر برای یک $i < |M|$ دنباله‌ی $(f_\lambda)_{\lambda<i}$ ساخته شده باشد، آنگاه

- اگر i حدی باشد،قرار می‌دهیم $f_i = \bigcup_{\lambda<i} f_\lambda$.
- اگر $i = \lambda + ۱$ آنگاه به طریق زیر، از قرارگرفتنِ m_λ را در دامنه و بردِ f_i اطمینان حاصل می‌کنیم:

اگر m_λ هم در دامنه و هم در بُردِ f_λ باشد، آنگاه قرار می‌دهیم $f_i = f_\lambda$. اگر m_λ در دامنه‌ی f_λ نباشد، آنگاه هم‌ارزی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\mathrm{dom}(f_\lambda) \equiv \mathrm{range}(f_\lambda).$$

از آنجا که $\mathfrak{M}$ همگن است، می‌توان عنصرِ d را چنان یافت که

$$\mathrm{dom}(f_\lambda) m_\lambda \equiv \mathrm{range}(f_\lambda) d.$$

قرار می‌دهیم $f'_\lambda = f_\lambda \cup \{(m_\lambda, d)\}$. اگر $m_\lambda \in \mathrm{range}(f'_\lambda)$ آنگاه قرار می‌دهیم $f_i = f'_\lambda$ و در غیر این صورت، از هم‌ارزیِ

$$\mathrm{dom}(f_\lambda)m_\lambda \equiv \mathrm{range}(f_\lambda)d$$

و همگنیِ $\mathfrak{M}$ استفاده کرده عنصرِ d' را چنان می‌یابیم که

$$\mathrm{dom}(f_\lambda)m_\lambda d' \equiv \mathrm{range}(f_\lambda)dm_\lambda$$

و قرار می‌دهیم $f_i = f'_\lambda \cup \{(d', m_\lambda)\}$.

تمرین ۱۳۸: نشان دهید که $f = \bigcup_{\lambda<|M|} f_\lambda$ اتومرفیسمی از $\mathfrak{M}$ است.

$\square$

پیشتر ثابت کرده بودیم که هر مدلِ $\mathfrak{M}$ را می‌توان در یک مدل ωـ اشباع نشاند که اندازه‌ی آن بزرگتر از $|M|^{\aleph_0}$ نباشد. در زیر خواهیم دید که همگنی در همان اندازه‌ی M دست‌یافتنی است.

گزاره ۱۳۹: هر مدلِ $\mathfrak{M}$ در مدلی ωـ همگن چون $\mathfrak{N} \succeq \mathfrak{M}$ می‌نشیند که $|M| = |N|$.

اثبات. نخست ادعا می‌کنیم که مدل $\mathfrak{N}$ چنان موجود است که $|M| = |N|$ و برای هر دو دنباله‌ی متناهیِ $\bar{a}, \bar{b}$ از اعضای M اگرچنانچه $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{b})$ آنگاه برای هر $c \in M$ عنصرِ $d \in N$ چنان موجودند که

$$\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}c) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{N}}(\bar{b}d).$$

برای اثبات ادعا، مجموعه‌ی I را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$I = \{\langle \bar{a}, \bar{b}, c\rangle : |\bar{a}| = |\bar{b}|, \bar{a}, \bar{b}, c \in M, \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{b})\}.$$

دقت کنید که $|M| = |I|$ و شمارش $\{\langle \bar{a}_i, \bar{b}_i, c_i\rangle\}$ را برای I در نظر بگیرید. قرار دهید $\Sigma_i(\bar{x}, y_i) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}_i, c_i)$ و توجه کنید که $\bigcup \Sigma_i(\bar{b}_i, y_i) \cup \mathrm{Diag}_{el}(\mathfrak{M})$ سازگار است (چرا؟ ــ توجه کنید که هر بخش متناهی آن، بنا به همتاییِ $\bar{a}_i$ ها با $\bar{b}_i$ ها در خودِ M برآورده می‌شود). بنابراین گسترشی مقدماتی از $\mathfrak{M}$ چون $\mathfrak{N}$ و عناصرِ d_i در آن چنان موجودند که

$$\langle a_i, c_i\rangle \equiv \langle b_i, d_i\rangle \quad \forall i < |M|.$$

برای راحت شدن ادامه‌ی بحث، مدلی را که با شروع از مدلِ $\mathfrak{M}$ و اعمال روند بالا حاصل می‌شود، با $H(\mathfrak{M})$ نشان می‌دهیم.

یادآوری ۱۴۰: می‌شد برای اثبات ادعای بالا، مدلِ $\mathfrak{N}$ را از اجتماع زنجیری از مدلهای $\mathfrak{N}'_i$ به دست آورد که در هر N'_i عنصری چون d_i همتایپ با c_i موجود است.

تمرین ۱۴۱: ادعای بالا را با استفاده‌ی مستقیم از تعریفِ گالواتایپها ثابت کنید.

ادامه‌ی اثبات. زنجیرِ $\langle \mathfrak{N}_i \rangle_{i\in\omega}$ را از مدلها، با استقرا و با قرار دادنِ $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N}$ و $\mathfrak{N}_{i+1} = H(\mathfrak{N}_i)$ می‌سازیم. (بررسی کنید که) $\mathfrak{N}_\omega = \bigcup \mathfrak{N}_i$ مدل مطلوب است. □

تمرین ۱۴۲: هر مدلِ اتمیک، ω ـ همگن است؛ پس بویژه هر مدلِ اول، همگن است.

تمرین ۱۴۳: هر مدلِ κ ـ اشباع، κ ـ همگن است؛ به ویژه هر مدل اشباع، همگن است.

تعریف ۱۴۴ (مدل جهانی): مدل $\mathfrak{M}$ را κ **ـ جهانی** می‌خوانیم هرگاه برای هر $T \models \mathfrak{N}$ اگر $|N| < \kappa$ آنگاه بتوان نگاشتی مقدماتی مانند $f : \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$ یافت.

تمرین ۱۴۵: اگر $\mathfrak{M}$ مدلی κ ـ اشباع باشد، آنگاه κ^+ ـ جهانی است.

قضیه‌ی زیر در جلسه‌ی بعد ثابت خواهیم کرد.

قضیه ۱۴۶: مدلِ $\mathfrak{M}$ مدلی κ ـ اشباع است اگروتنهااگر κ ـ همگن و κ^+ جهانی باشد.

در حالت کلی اگر یک خانواده‌ی $(\mathcal{K}, \leq)$ از مدلها داشته باشیم که در آن $\leq$ نوعی نشانش اعضای این خانواده باشد دارای ویژگیهای مطلوبی چون ادغام و همنشانی، آنگاه با درنظرگرفتن گالواتایپها، مشابه بالا اشباع بودن با همگن و جهانی بودن معادل است. در این باره در یکی از پروژه‌های درس صحبت خواهد شد.