## ۱۳ جلسه‌ی دوازدهم

تعریف ۱۲۴: فرض کنید $\kappa \geq \aleph_0$ یک کاردینال نامتناهیِ دلخواه باشد. مدلِ $\mathfrak{M}$ را $\kappa$ ـ **اشباع** می‌خوانیم هرگاه برای هر زیرمجموعه‌ی $A \subseteq M$ با $|A| < \kappa$، هر $n$ تایپِ متعلق به $S_n^{\mathfrak{M}}(A)$ در خودِ $M$ برآورده شود.

بنابراین مدلِ $\mathfrak{M}$ را $\aleph_1$ ـ اشباع می‌خوانیم هرگاه همه‌ی تایپهای روی زیرمجموعه‌های شمارای $M$ در آن محقق شوند. نیز واضح است که هرگاه $\mathfrak{M}$ مدلی $\kappa$ ـ اشباع باشد، آنگاه $\lambda$ ـ اشباع نیز برای هر $\kappa > \lambda$ هست. منظور از مدلِ $\aleph_0$ اشباع نیز، دقیقاً همان است که پیشتر به نام $\omega$ ـ اشباع معرفی کرده بودیم.

تعریف ۱۲۵: مدلِ $\mathfrak{M}$ را اشباع می‌خوانیم هرگاه $|M|$ ـ اشباع باشد.

در تعریفِ آکندگی، این که مجموعه‌ی پارامتر اندازه‌ی اکیداً کمتر از $\kappa$ داشته باشد ضروری است؛ برای مثال مجموعه‌ی زیر یک تایپ جزئی روی مجموعه‌ی پارامترِ $M$ است که برآورده شدنش در $M$ میسر نیست:

$$p(x) = \{x \neq m | m \in M\}.$$

گزاره‌ای مشابه گزاره‌ی زیر در بحثِ $\omega$ ـ آکندگی اثبات کرده بودیم و از این رو در زیر به بیان گزاره بسنده می‌کنیم.

گزاره ۱۲۶: برای $T \models \mathfrak{M}$ موارد زیر با هم معادلند.

۱. $\mathfrak{M}$ مدلی $\kappa$ ـ اشباع است.

۲. برای هر مجموعه‌ی $A \subseteq M$ با اندازه‌ی اکیداً کمتر از $\kappa$ هر $n$ ـ تایپِ جزئیِ $\pi(\bar{x})$ در $\mathrm{Th}(\langle \mathfrak{M}, a \rangle_{a \in A})$ در $M$ برآورده می‌شود.

۳. برای هر مجموعه‌ی $A \subseteq M$ با اندازه‌ی اکیداً کمتر از $\kappa$ هر تایپِ کاملِ $p(x) \in S_1^{\mathfrak{M}}(A)$ در $M$ برآورده می‌شود.

۴. حکم شماره‌ی ۳ برای تایپهای جزئی تک‌متغیره.

تمرین ۱۲۷ (وجود مدل اشباع): برای هر $T \models \mathfrak{M}$ مدلی $\kappa$ ـ اشباع چون $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$ چنان موجود است که $|N| \leq |M|^\kappa$.

تمرین ـ قضیه‌ی بالا مشابه گزاره‌ی ۱۱۶ اثبات می‌شود با این تفاوت که در اینجا به اجتماع زنجیری از مدلها با طول $\kappa^+$ نیاز است. بررسی کنید که اگر $\kappa$ کاردینالی منتظم [۶۰] باشد، می‌توان با زنجیری از طول $\kappa$ نیز به مطلوب رسید.

تمرین ۱۲۸: اگر $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ دو مدل اشباع برای $T$ باشند و $|M| = |N|$ آنگاه $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}$.

مثال ۱۲۹: فرض کنید $T \models \mathfrak{M}$ و $F$ یک فرافیلترِ غیراصلی روی $\mathbb{N}$ باشد. آنگاه $\prod_F \mathfrak{M}$ مدلی $\aleph_1$ ـ اشباع است.

مثال ۱۳۰ (حکمی کلّی‌تر): اگر $F$ یک فرافیلترِ غیراصلی روی $\mathbb{N}$ باشد و $\{\mathfrak{M}^h\}_{h\in\mathbb{N}}$ خانواده‌ای از مدلها، آنگاه $\prod_F M^h$ مدلی $\aleph_1$ ـ اشباع است.

پیش از آنکه حکم مثال بالا را اثبات کنیم، یادآوری می‌کنیم که اگر $\{\mathfrak{M}_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای باشد از مدلهای یک تئوریِ $T$، آنگاه عناصرِ $\prod_F \mathfrak{M}_i$ دنباله‌های $(a_i)_{i\in I}$ هستند به هنگِ رابطه‌ی هم‌ارزی زیر:

$$(a_i) \sim (b_i) \Leftrightarrow \{i|\mathfrak{M} \models a_i = b_i\} \in F.$$

کلاسهای هم‌ارزی اینچنین را با نمادی چون $[(a_i)]$ نمایش می‌دهیم. بنا به قضیه‌ی واش [۶۱] (که آن را در کلاس آموختال ثابت خواهیم کرد) داریم

$$\prod_F \mathfrak{M}_i \models \phi([(a_i)_{i\in I}], \dots, [(b_i)_{i\in I}]) \Leftrightarrow \{i \in I|\mathfrak{M} \models \phi(a_i, \dots, b_i)\} \in F.$$

*اثبات حکم مثال بالا.* فرض کنید $\Sigma(x)$ تایپی جزئی باشد با مجموعه‌ی پارامترِ شمارای $A = (a_i)_{i\in\omega}$. فرض می‌کنیم $a_i = [(a_i^h)_{h\in\omega}]$. از آنجا که $\Sigma$ با $\mathrm{Th}(\prod_F \mathfrak{M}^h)$ سازگار است، برای هر $i \in \omega$ داریم $\prod_F \mathfrak{M}^h \models \exists x \quad \phi_.(x, a_.) \wedge \dots \wedge \phi_i(x, a_i)$؛ یعنی مجموعه‌های $D_i$، تعریف‌شده در زیر، همه اعضایی از $F$ هستند.

$$D_i := \{h \in \omega|\mathfrak{M}^h \models \exists x \quad \phi_.(x, a_.^h) \wedge \dots \wedge \phi_i(x, a_i^h)\}$$

برای این که نشان دهیم $\Sigma$ در $\prod_F \mathfrak{M}^h$ برآورده می‌شود، کافی است عنصر $x = [(x^h)_{h\in\omega}]$ را چنان بیابیم که برای هر $i \in \omega$ داشته باشیم $\prod_F \mathfrak{M}^h \models \phi_i(x, a_i) \wedge \dots \wedge \phi_.(x, a_.)$؛ به بیان بهتر

[۶۰] regular

[۶۱] Łoś's theorem

چنان، که:

$$\{h\in\omega|\mathfrak{M}^h\models\phi_i(x^h,a_i^h)\wedge\phi_{i-۱}(x^h,a_{i-۱}^h)\wedge\ldots\wedge\phi_۰(x_۰,a_۰^h)\}\in F.$$

طبق تعریف داریم

$$D_۰=\{h\in\omega|\mathfrak{M}^h\models\exists x\quad\phi_۰(x,a_۰^h)\}$$

فرض کنیم $x_۰=(x_۰^h)_{h\in\omega}$ به گونه‌ای باشد که

$$\forall h\in D_۰\quad\mathfrak{M}^h\models\phi(x_۰^h,a_۰^h).$$

نیز طبق تعریف داریم:

$$D_۱=\{h\in\omega|\mathfrak{M}^h\models\exists x\quad\phi_۰(x,a_۰^h)\wedge\phi_۱(x,a_۱^h)\}$$

فرض کنیم $x_۱=(x_۱^h)_{h\in\omega}$ از رهگذر زیر حاصل شده باشد:

- $(x_۱^h)_{h\leq minD_۰}=(x_۰^h)_{h\leq minD_۰}$.
- برای $h>\min D_۰$ اگر $h\in D_۱$ آنگاه $x_۱^h$ را یکی از عناصری می‌گیریم که شاهد $\mathfrak{M}^h\models\exists x\quad\phi_۰(x,a_۰^h)\wedge\phi_۱(x,a_۱^h)$ هستند. اگر $h\in D_۰-D_۱$ آنگاه قرار می‌دهیم $x_۱^h=x_۰^h$. به سایرِ $h>\min D_۰$ دست نمی‌زنیم.

تا اینجا داریم $\{h\in\omega|\mathfrak{M}^h\models\phi_۰(x_۱^h,a_۰^h)\}=D_۰\in F$. نیز

$$\{h\in\omega|\mathfrak{M}^h\models\phi_۱(x_۱^h,a_۱^h)\wedge\phi_۰(x_۱^h,a_۰^h)\}\quad(*)$$

از دو حال خارج نیست. یا برابر با $D_۱$ است که در این صورت عضوی است از $F$؛ و یا برابر است با $D_۱-\min D_۰$. به دو نکته توجه کنیم. از آنجا که فیلتر مورد نظر غیر اصلی است، برداشتن یک عضو از یکی از عناصر آن موجب خارج شدن از فیلتر نمی‌شود. زیرا اولاً هر فیلتر غیراصلی شامل فیلتر فرشه است؛ پس $\{i|i\geq\min D_۰+۱\}\in F$. ثانیاً $D_۰\cap\{i|i\geq\min D_۰+۱\}\in F$ همان $(*)$ است.

بدین ترتیب برای تعریفِ $(x_۲^h)$ قرار می‌دهیم:

- $(x_۲^h)_{h\leq\min(D_۱-\{\min D_۰\})}=(x_۱^h)_{h\leq\min(D_۱-\{\min D_۰\})}$.

- برای $h > \min(D_1 - \{\min D_0\})$ اگر $h \in D_1$ آنگاه $x_2^h$ را یکی از عناصری می‌گیریم که ضامنِ $\mathfrak{M}^h \models \exists x \quad \phi_0(x, a_0^h) \wedge \phi_1(x, a_1^h) \wedge \phi_2(x, a_2^h)$ هستند.

بدینسان اگر $(x_\omega^h)_{h\in\omega}$ از ادامه‌ی همین روند به صورت استقرائی حاصل شود، در شرط مطلوب ما صدق می‌کند. $\square$

پیشتر درباره‌ی سامانه‌های رفت‌وبرگشتی و رابطه‌ی آنها با حذف سور و هم‌ارز بودنِ مقدماتی صحبت کرده بودیم (بخش بحثهای جانبی در تارنمای درس). گفته بودیم که سامانه‌های رفت و برگشتی، گاه از نگاشتهای مقدماتی جزئی تشکیل می‌شوند و گاه از ایزومرفیسمهای جزئی. گاه میان زیرمجموعه‌های یک مدل در نظر گرفته می‌شوند، گاه میان زیرمجموعه‌های دو مدل مختلف. گاه تحت اجتماعگیری بسته‌اند و گاه خیر، و آنجا که تحت اجتماعگیری بسته باشند، ایزومرفیسم یا اتومرفیسم به دست می‌دهند. در زیر با مدلهای همگن آشنا می‌شویم که در آنها، بنا به تعریف، هم‌ارزیهای کوچک در سامانه‌های رفت‌وبرگشتی واقعند.

تعریف ۱۳۱ (همگن): مدل $\mathfrak{M}$ را $\omega$ ـ **همگن** [۶۲] می‌خوانیم یا $\aleph_0$ ـ همگن می‌خوانیم هرگاه برای هر $a_1, \ldots, a_n \in M$ و $b_1, \ldots, b_n \in M$ اگر

$$\langle \mathfrak{M}, a_1, \ldots, a_n \rangle \equiv \langle \mathfrak{M}, b_1, \ldots, b_n \rangle$$

آنگاه برای هر $c \in M$ عنصر $d \in M$ چنان یافت شود که

$$\langle \mathfrak{M}, a_1, \ldots, a_n, c \rangle \equiv \langle \mathfrak{M}, b_1, \ldots, b_n, d \rangle.$$

به بیان دیگر مدل $\mathfrak{M}$ وقتی $\omega$ ـ همگن است که مجموعه‌ی $I$ در زیر یک سامانه‌ی رفت‌وبرگشتی از نگاشتهای مقدماتیِ جزئی باشد:

$$\{(\bar{a}, \bar{b}) : |\bar{a}| = |\bar{b}|, \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{b})\}.$$

یا به بیان دیگر، در یک مدلِ $\omega$ ـ همگن، هر نگاشت مقدماتیِ جزئیِ $f : \bar{a} \to \bar{b}$ در یک سامانه‌ی رفت‌وبرگشتی از نگاشتهای جزئیِ مقدماتی واقع است.

[۶۲] homogeneous

تعریف ۱۳۲: مدل $\mathfrak{M}$ را $\kappa$ ـ همگن می‌خوانیم هرگاه برای هر $\lambda < \kappa$ و هر دو دنباله‌ی $(a_i)_{i<\lambda}$ و $(b_i)_{i<\lambda}$ از عناصرِ $M$، اگر

$$\langle \mathfrak{M}, (a_i)_{i<\lambda} \rangle \equiv \langle \mathfrak{M}, (b_i)_{i<\lambda} \rangle$$

آن گاه برای هر $c \in M$ عنصر $d \in M$ چنان موجود باشد که

$$\langle \mathfrak{M}, (a_i)_{i<\lambda}, c \rangle \equiv \langle \mathfrak{M}, (b_i)_{i<\lambda}, d \rangle.$$

به بیان دیگر هر نگاشت مقدماتیِ جزئیِ $f : (a_i)_{i<\lambda} \to (b_i)_{i<\lambda}$ در سامانه‌ای رفت‌وبرگشتی از نگاشتهای مقدماتی جزئی میان زیرمجموعه‌های $M$ واقع شود.

تعریف ۱۳۳: مدلِ $\mathfrak{M}$ را همگن می‌خوانیم هرگاه $|M|$ ـ همگن باشد.

تعریف ۱۳۴: مدلِ $\mathfrak{M}$ را **قویّاً** $\kappa$ **ـ همگن** می‌خوانیم هرگاه برای هر $\lambda < \kappa$ چنانچه برای دو دنباله‌ی $(a_i)_{i<\lambda}$ و $(b_i)_{i<\lambda}$ از عناصرِ $M$ داشته باشیم

$$\langle \mathfrak{M}, (a_i)_{i<\lambda} \rangle \equiv \langle \mathfrak{M}, (b_i)_{i<\lambda} \rangle$$

آنگاه اتومرفیسمِ $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{M})$ چنان موجود باشد که

$$\forall i < \lambda \quad f(a_i) = b_i.$$

به بیان دیگر هرگاه هر نگاشتِ مقدماتی جزئی میان زیرمجموعه‌های کوچکتر از $\kappa$ قابل گسترش به یک اتومرفیسم باشد. مدل $\mathfrak{M}$ را قویّاً همگن می‌خوانیم هرگاه $|M|$ ـ قویاًهمگن باشد.

گزاره ۱۳۵: اگر $\mathfrak{M}$ همگن باشد، قویاًهمگن است.

قضیه‌ی بالا را در جلسه‌ی بعد ثابت خواهیم کرد. توجه کنید که در بالا ادعا **نکرده‌ایم** که اگر مدلی، $\kappa$ ـ همگن باشد، آنگاه $\kappa$ ـ قویاً همگن است.