۱۲ جلسه‌ی یازدهم

پیش از ورود به بحث، در زیر برای یادآوری تعاریفی معادل برای مفهوم تایپ آورده‌ایم. فرض کنید $\mathfrak{M} \models T$ و $\bar{a} \in M$ و $A \subseteq M$.

۱. می‌نویسیم $p(\bar{x}) \in S_n^{\mathfrak{M}}(A)$، و می‌گوییم که $p(\bar{x})$ یک تایپ کامل در $\mathfrak{M}$ روی A است، هرگاه $p(\bar{x})$ یک مجموعه‌ی سازگار بیشینال از فرمولها باشد با متغیرِ $\bar{x}$ که با $\mathrm{Th}(\langle \mathfrak{M}, c\rangle_{c\in A})$ سازگار است. طبق این تعریف، اگر $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ آنگاه

$$p(\bar{x}) \in S_n^{\mathfrak{M}}(A) \Leftrightarrow p(\bar{x}) \in S_n^{\mathfrak{N}}(A)$$

می‌گوییم دو عنصرِ $a, b \in M$ روی A همتایپند، و می‌نویسیم $a \equiv_A b$ هرگاه تایپی چون $p(x) \in S_n^{\mathfrak{M}}(A)$ چنان موجود باشد که هر دوی a, b آن را برآورده کنند؛ معادلاً هرگاه توسیع $\mathfrak{M} \succ \mathfrak{N}$ و تایپی چون $p(x) \in S_n^{\mathfrak{N}}(A)$ موجود باشد چنان که a, b هر دو $p(x)$ را برآورند. در این صورت، نیز می‌نویسیم $p(x) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a/A) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(b/A)$.

فرض کنیم $A \subseteq \mathfrak{N}$ نه لزوماً توسیعی مقدماتی از $\mathfrak{M}$ باشد و $b \in N$. در این صورت می‌نویسیم $a \equiv_A b$ هرگاه هر دوی a و b یک تایپِ $p(x) \in S_n^{\mathfrak{M}}(A)$ را برآورده کنند.

۲. می‌نویسیم $p(\bar{x}) \in S_n^{\mathfrak{M}}(A)$، و می‌گوییم که $p(\bar{x})$ یک تایپ کامل در $\mathfrak{M}$ روی A است، هرگاه توسیعِ مقدماتیِ $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ و عنصر $\bar{b} \in N$ چنان موجود باشند که $p(\bar{x}) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{N}}(\bar{b}/A)$ که در این جا، بنا به تعریف

$$\mathrm{tp}^{\mathfrak{N}}(\bar{b}/A) = \{\phi(\bar{x}) | \mathfrak{N} \models \phi(\bar{b})\}.$$

۳. برای هر دو مدلِ $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ که $A \subseteq M, N$ و هر $\bar{a} \in M$ و $\bar{b} \in N$ تعریف می‌کنیم $\bar{a} \equiv_A \bar{b}$ هرگاه مدلِ $\mathfrak{K}$ و نگاشتهای مقدماتیِ $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{K}$ و $g : \mathfrak{N} \to \mathfrak{K}$ چنان موجود باشند که $g(\bar{a}) = g(\bar{b})$. در این صورت می‌نویسیم $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}/A) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{N}}(\bar{b}/A)$.

۴. برای دو چندتاییِ $\bar{a}, \bar{b} \in M$ می‌نویسیم $\bar{a} \equiv_A \bar{b}$ هرگاه یک توسیع مقدماتیِ $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ موجود باشد به همراه یک اتومرفیسمِ $\sigma : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ چنان که $\sigma(\bar{a}) = \bar{b}$.

همان گونه که از تعاریف بالا برمی‌آید، تعریف تایپ بسته به توسیعهای مقدماتی یک مدل است. اگر یک مدل سِتُرگ (فعلاً نه به معنای اصطلاحیش و تنها به معنی بسیار بزرگ)، مثلاً به نام $\mathbb{M}$ داشتیم که همه‌ی مدلها به طور مقدماتی در آن می‌نشستند به راحتی می‌شد بگوییم هر تایپِ $p(\bar{x}) \in S_n^{\mathfrak{M}}(A)$ در واقع برابر است با $\mathrm{tp}^{\mathbb{M}}(\bar{a}/A)$ برای یک $\bar{a} \in \mathbb{M}$. در جلسات بعد بدین نکته خواهیم پرداخت.

در پایان جلسه‌ی پیش گزاره‌ی زیر را بیان و اثباتش را به این جلسه موکول کرده بودیم.

گزاره ۱۱۶: اگر $T \models \mathfrak{M}$ آنگاه T مدلی ωـ اشباع مانند $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$ دارد چنان که $|N| \leq |M|^{\aleph_0}$.

اثبات. فرض کنید $\langle p_\gamma(x) \rangle_{\gamma \in \lambda}$ شمارشی از همه‌ی تایپهای روی زیرمجموعه‌های متناهیِ M باشد. تعداد این چنین تایپها، حداکثر $|M| \times 2^{\aleph_0}$ است. (تحقیق کنید که) $\mathrm{Diag}_{el}(\mathfrak{M}) \cup \bigcup p_\gamma(c_\gamma)$ به طور متناهی ارضاء پذیر است ((c_γ) را مجموعه‌ای از ثوابت در نظر گرفته‌ایم). بنا بر فشردگی، مجموعه‌ی یادشده دارای مدلی از اندازه‌ی حداکثر (و بنا به لونهایم اسکولم از اندازه‌ی دقیقاً برابر با) $|M|^{\aleph_0}$ است. این مدل را $\mathfrak{N}_0$ می‌نامیم و روند بالا را بدان اعمال می‌کنیم تا به مدلِ $\mathfrak{N}_1$ برسیم. گیریم $(\mathfrak{N}_i)$ زنجیری باشد که بدین رهگذر حاصل شده است و قرار می‌دهیم $\mathfrak{N}_\omega = \bigcup \mathfrak{N}_i$. اگر $\beta_1, \ldots \beta_n \in N_\omega$ و $p(x) \in S^{\mathfrak{N}_\omega}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ باشد، آنگاه مدلی چون $\mathfrak{N}_k$ برای یک $k < \omega$ همه‌ی β_i ها را دربردارد. بنابراین $p(x)$ در $\mathfrak{N}_{k+1}$ (و از این رو در $\mathfrak{N}_\omega$) برآورده می‌شود. □

نکته ۱۱۷:

۱. اگر $T \models \mathfrak{N}$ مدلی ωـ اشباع باشد و $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in N$ آنگاه $\langle \mathfrak{N}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ مدلی ωـ اشباع برای $\mathrm{Th}(\langle \mathfrak{N}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle)$ است.

۲. اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ مجموعه‌ی $S_n(\mathrm{Th}(\mathfrak{N}))$ شمارا باشد، آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ مجموعه‌ی $S_n(\mathrm{Th}(\langle \mathfrak{N}, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \rangle))$ نیز شماراست.

اثبات شماره‌ی ۲. نگاشتِ

$$S_n(\mathrm{Th}(\langle \mathfrak{N}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle)) \to S_{n+k}(T)$$
$$p(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) \mapsto p(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k})$$

نگاشتی یک به یک است. شمارا بودنِ فضای دامنه‌ی آن از شمارا بودن فضای بُردِ آن نتیجه می‌شود. □

بنا به تمرین زیر، ممکن است که در یک تئوریِ T مجموعه‌ی $S_1(T)$ شمارا باشد ولی $S_2(T)$ ناشمارا:

تمرین ۱۱۸:

۱. نشان دهید که در $\langle \mathbb{R}, +, 0 \rangle$ تعداد تایپهای با یک متغیر، دو تاست و تعداد تایپهای با دو متغیر برابر با $\aleph_0$.

۲. نشان دهید که در $\langle \mathbb{R}, +, 0, < \rangle$ تعداد تایپهای با یک متغیر، سه تاست و تعداد تایپهای با دو متغیر برابر با $2^{\aleph_0}$.

در جلسه‌ی پیش همچنین اثبات قضیه‌ی زیر را وعده کرده بودیم.

قضیه ۱۱۹: تئوریِ T دارای یک مدل شمارای‌اشباع است اگروتنهااگر $S_n(T)$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ شمارا باشد.

اثبات. اگر T دارای مدل شمارای‌اشباعِ $\mathfrak{M}$ باشد، برای هر $n \in \mathbb{N}$ هر تایپِ در $S_n(T)$ در M برآورده می‌شود. بنابراین $|S_n(T)| \leq \aleph_0$.

اگر هر $S_n(T)$ شمارا باشد، بنا بر مورد دوم در نکته‌ی بالا، برای هر $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in M$ مجموعه‌ی $S_1(\mathrm{Th}(\langle \mathfrak{M}, \bar{\alpha} \rangle))$ نیز شماراست. پس مدل شمارای $\mathfrak{N}_1$ چنان موجود است که هر تایپِ متعلق به $S_1(\mathrm{Th}(\langle \mathfrak{M}, \bar{\alpha} \rangle))$ در آن برآورده شود. نیز مدلی شمارا چون $\mathfrak{N}_2$ چنان موجود است که همه‌ی تایپهای متعلق به $S_1(\mathrm{Th}(\langle \mathfrak{N}_1, \bar{\alpha} \rangle))$ برای هر $\bar{\alpha} \in N$ در آن برآورده می‌شوند. اجتماع زنجیرِ $\mathfrak{N}_i$ هایی که از این رهگذر حاصل می‌شود، مدل مطلوب است. $\square$

تمرین ۱۲۰: نشان دهید که اگر T یک مدل اول داشته باشد که ω ـ اشباع باشد، آنگاه T یک تئوریِ $\aleph_0$ ـ جازم است.

گزاره ۱۲۱: اگر $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ دو مدل شمارای‌اشباع باشند آنگاه $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$.

اثبات. گیریم $M = (a_i)_{i \in \omega}$ و $N = (b_i)_{i \in \omega}$. از آنجا که $\mathfrak{N}$ اشباع است، عنصری چون b را چنان شامل است که

$$b \equiv a.$$

به همین ترتیب از آنجا که $\mathfrak{M}$ اشباع است، عنصری چون a را چنان شامل است که

$$b_{\circ}b \equiv aa_{\circ}$$

برای اثبات این گفته، فرض کنید $\phi(x, b)$ فرمولی باشد که توسط $b_{\circ}$ برآورده می‌شود. پس داریم $\mathfrak{M} \models \exists x \quad \phi(x, b)$. از آنجا که $b \equiv a_{\circ}$ داریم $\mathfrak{N} \models \exists x \quad \phi(x, a_{\circ})$. از این رو، اگر $p(x, b) = \operatorname{tp}(b_{\circ}/b)$ آنگاه هر بخش متناهی از $p(x, a_{\circ})$ در N برآورده می‌شود و از آنجا که $\mathfrak{N}$ شماراست، این تایپ در آن به‌کلی برآورده می‌شود.

پس نگاشتِ مقدماتیِ $f_{\circ}$ را با ضابطه‌ی $f_{\circ}(a_{\circ}) = b$ و $f_{\circ}(a) = b_{\circ}$ تعریف می‌کنیم (این نگاشت، $a_{\circ}$ را در دامنه و $b_{\circ}$ را در بُرد دارد). فرض کنیم نگاشتِ مقدماتیِ f_n ساخته شده است که $a_{i \leq n}$ را در دامنه و $b_{i \leq n}$ را در بُرد دارد. قرار می‌دهیم $p(x, \bar{c}) = \operatorname{tp}(a_{n+1}/\operatorname{dom} f_n)$ و بنا به مقدماتی بودنِ نگاشتِ f_n عنصری چون $b' \in N$ را چنان می‌یابیم که $b' \models p(x, f(\bar{c}))$. به همین ترتیب قرار می‌دهیم $q(x, b' f(\bar{c})) = \operatorname{tp}(b_{n+1}/b' f(\bar{c}))$ و عنصری چون $a' \in N$ می‌یابیم که $a' \models q(x, a_{n+1}, \bar{c})$. نگاشت مقدماتیِ f_{n+1} را توسیعی از f_n می‌گیریم که a_{n+1} را به b' می‌برد و a' را به b_{n+1}. نگاشتِ $f = \bigcup f_i$ نگاشتی یک و یک و پوشا و ضامنِ ایزومرف بودنِ $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ است. $\square$

نکته ۱۲۲: مدلهای اشباع را گاهی مدلهای **فشرده** نیز می‌خوانند، از آن جهت که هرگاه $\pi(x)$ مجموعه‌ای از فرمولها باشد که به طور متناهی در یک مدلِ اشباعِ $\mathfrak{M}$ برآورده می‌شود، آنگاه M عنصری دارد که این تایپ را برآورده کند.

گزاره ۱۲۳: فرض کنیم $\{M_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از مدلهای تئوریِ T باشد و F فرافیلتری روی I. آنگاه $\prod_F M_i$ مدلی است ω ـ اشباع.

گزاره‌ی بالا را در جلسه‌ی بعد ثابت خواهیم کرد. پیش از آن بدین نکته توجه می‌دهیم که مدلی که در گزاره‌ی بالا بدان اشاره شده است، در حقیقت، ω_1 ـ اشباع است؛ بدین معنی که هر تایپ روی یک زیرمجموعه‌ی شمارا از آن در آن برآورده می‌شود.