۱۱ جلسه‌ی دهم، آکَندِگی

در جلسه‌ی پیش درباره‌ی مدلهای اول و اتمیک، چونان مدلهای حداقلی بحث کردیم. در این جلسه، به مدلهای اشباع، بمثابه مدلهای حداکثری خواهیم پرداخت.

پیش از شروع بحث اصلی، کمی به فلسفه‌ی آکندگی می‌پردازیم. قبلاً درباره‌ی شناخت ذات از روی صفات و تناظر فلسفی آن با مفهوم تایپها گفتگو کرده بودیم. گفتیم گاهی ذات یک موجود در دسترس نیست، ولی می‌توان آن را از روی مجموعه‌ی صفاتش شناخت. بزرگترین مجموعه‌ی ممکن از این صفاتِ ثبوتیه و نقیضِ صفات سلبیه‌ی یک موجود را می‌توان با خودِ آن موجود یکی در نظر گرفت. در جهانهای اشباع، برای هر مجموعه‌ی سازگار از صفات، موجودی هست که آن صفات وصف اویند. در این جهان هر چه پیش آمدنش ممکن باشد، رخ می‌دهد و هر مجموعه از صفاتی که با هم در تناقض نباشند، در حقیقت مجموعه‌ی صفات یک ذات بخصوص است.

طبق تعریف، یک تایپ کامل در تئوریِ T مجموعه‌ای از فرمولهای سازگار با این تئوری است. این مجموعه از فرمولها لزوماً در هر مدلی برآورده نمی‌شود. در واقع اگر $p(x) \in S^M(A)$ تایپی کامل باشد در مدل M و روی مجموعه‌ی پارامترِ A آنگاه مدلی چون $N \succ M$ و در آن عنصری چون a موجودند به طوری که $p(x) = \mathrm{tp}^N(a/A)$. اگر مدلِ M به‌اندازه‌اشباع باشد، عنصرِ a را می‌توان در خودش جُست. به زبان دقیق بازگردیم:

فرض کنیم $\mathfrak{M}$ مدلی باشد از T و A زیرمجموعه‌ای از آن. زبانِ L_A توسیعی از زبانِ L است که با افزودن یک ثابتِ c_a برای هر $a \in A$ حاصل می‌شود. بدیهی است که $\mathfrak{M}$ را می‌توان با تعبیرِ طبیعی عناصرِ A به عنوان یک L_A ـ ساختارِ $\langle \mathfrak{M}, a\rangle_{a\in A}$ در نظر گرفت. قرار می‌دهیم $T_A := \mathrm{Th}\langle \mathfrak{M}, a\rangle_{a\in A}$ و تعریف می‌کنیم

$$S_n^{\mathfrak{M}}(A) = S_n(T_A).$$

هر $p(\bar{x}) \in S_n(A)$ را یک تایپ کامل با پارامتر در A می‌خوانیم. واضح است که اگر $p(\bar{x})$ یک تایپ کامل با پارامتر در A باشد، آنگاه $T_A \cup p(\bar{x})$ سازگار و از این رو برآورده‌شدنی در یک توسیعِ مقدماتیِ $\mathfrak{N}$ از $\mathfrak{M}$ است. به بیان دیگر، برای یکچنین تایپِ $p(\bar{x})$ مجموعه‌ی $\mathrm{Diag}_{el}(\mathfrak{M}) \cup p$ سازگار است.

تعریف ۱۰۸ (مدل آکنده): مدلِ $\mathfrak{M}$ را ω ـ آکنده یا ω ـ اشباع [۵۸] می‌خوانیم هرگاه برای هر

[۵۸] ω-saturated

زیرمجموعه‌ی متناهیِ $A \subseteq M$ و هر $n \in \mathbb{N}$، هر تایپِ کاملِ $p(\bar{x}) \in S_n^{\mathfrak{M}}$ در M برآورده شود.

مثال ۱۰۹: مدلِ اولِ DLO یعنی $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ مدلی ω ـ آکنده است. فرض کنید $\alpha_۱, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Q}$ و تئوریِ $T = \mathrm{Th}(\langle \mathbb{Q}, \leq, \alpha_۱, \ldots, \alpha_n \rangle)$ و تایپِ $p(\bar{x}) \in S_n(T)$ در نظر بگیرید. با استفاده از سامانه‌ای رفت و برگشتی، (تحقیق کنید که) می‌توان نشان داد که T یک تئوریِ $\aleph_۰$ ـ جازم است. تایپِ $p(\bar{x})$ در مدلی شمارا باید برآورده شود. این مدل شمارا ایزومرف با مدل اولِ تئوریِ T است. یعنی یگانه (به پیمانه‌ی ایزومرفیسم) مدل شمارای این تئوری، اشباع نیز هست.

تمرین ۱۱۰: نشان دهید که یگانه مدل شمارای یک تئوریِ $\aleph_۰$ ـ جازم، (هم اول است و هم ω ـ اشباع است. اثبات قسمت داخل پرانتز آسان نیست و بعداً بدان خواهیم پرداخت).

مثال ۱۱۱: دیدیم که ساختارِ $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, <, ۰, ۱ \rangle$ مدلی اول برای تئوریِ حساب پئانو است. تایپ جزئی زیر را در نظر بگیرید

$$\pi(x) = \{x > ۱, x > s(۱), x > ss(۱)), \ldots\}$$

و فرض کنید $p(x)$ کامل‌شده‌ی آن باشد. واضح است که $p(x)$ در $\mathbb{N}$ برآورده نمی‌شود؛ پس $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, <, ۰, ۱ \rangle$ مدلی ω ـ آکنده نیست. نیز قبلاً ثابت کرده‌ایم که $|S_۱(\mathrm{Th}(\langle \mathbb{N}, +, \cdot, <, ۰, ۱ \rangle))| = ۲^{\aleph_۰}$؛ بنابراین تئوری یادشده هیچ مدل شمارای آکنده‌ای ندارد (تعداد تایپهای متفاوت ناشماراست و از این رو نمی‌توان آنها را با شمارا عنصر برآورده کرد).

تعریف ۱۱۲: مدل $\mathfrak{M}$ را شمارای‌اشباع [۵۹] میخوانیم هرگاه هم شمارا و هم اشباع باشد.

مطابقِ مثال بالا، شرط لازم برای این که یک تئوری مدلی شمارای‌اشباع داشته باشد این است که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $|S_n(T)| \leq \aleph_۰$. (در جلسات بعد خواهیم دید که) عکس این گفته نیز برقرار است. یعنی هر تئوری T که در آن $S_n(T) \leq \aleph_۰$ یک مدل شمارای‌اشباع دارد. پس هر تئوری‌ای که یک مدل شمارای‌اشباع داشته باشد، دارای مدلی اول است (قبلاً ثابت کردیم که اگر یک تئوری مدل اول نداشته باشد، تعداد تایپهای آن ناشماراست). پس

گزاره ۱۱۳: اگر تئوریِ T دارای مدل شمارای‌اشباع باشد دارای مدل اول است.

هرگاه ویژگی‌ای بر حسب تایپها بیان شده باشد، رسم معمول در نظریه‌ی‌مدلْ تحقیق آن است که آیا برقرای این ویژگی برای تایپهای تک متغیره، برقراری آن را در حالت کلی نتیجه می‌دهد. برای مثال

[۵۹] countably saturated

گفتیم که اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ مجموعه‌ی تایپهای ایزوله‌ی n ـ متغیره، در $S_n(T)$ چگال باشد، آنگاه تئوری مورد نظر دارای مدل اول است. آیا چگال بودن تایپهای ایزوله‌ی تک‌متغیره در $S_n(T)$ برای برقراری این حکم کافی است؟ پاسخ این سوال منفی است. از طرفی گفتیم که مدلِ $\mathfrak{M}$ اشباع است هرگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ هر تایپِ $p \in S_n^{\mathfrak{M}}(A)$ در آن برآورده شود. در زیر نشان داده‌ایم که آکندگی از برآورده‌شدنِ تنها تایپهای تک‌متغیره نیز نتیجه می‌شود. (مشابه این گفته برای ساده بودن یا وابسته بودن تئوریها نیز برقرار است، که پرداختن بدانها جزو چارچوب این درس نیست).

گزاره ۱۱۴: برای $T \models \mathfrak{M}$ موارد زیر با هم معادلند.

۱. $\mathfrak{M}$ مدلی ω ـ اشباع است.

۲. برای هر مجموعه‌ی متناهی مانند $A \subseteq M$ هر n ـ تایپِ جزئیِ $\pi(\bar{x})$ در $\mathrm{Th}(\langle \mathfrak{M}, a\rangle_{a\in A})$ در M برآورده می‌شود.

۳. برای هر مجموعه‌ی متناهیِ $A \subseteq M$ هر تایپِ کاملِ $p(x) \in S_1^{\mathfrak{M}}(A)$ در M برآورده می‌شود.

۴. حکم شماره‌ی ۳ برای تایپهای جزئی تک‌متغیره.

اثبات. ۱ $\to$ ۳. فرض کنید بدانیم که هر $p(\bar{x}) \in S_n^{\mathfrak{M}}(A)$ در M برآورده می‌شود و تایپِ $p'(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S_{n+1}^{\mathfrak{M}}$ داده شده باشد. تعریف کنید

$$\exists y p' = \{\exists y \phi(x_1, \dots, x_n, y) | \phi(x_1, \dots, x_{n+1}) \in p\}.$$

(بررسی کنید که) $\exists y p'$ یک n ـ تایپ جزئی است، پس در M توسط عناصری چون $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ برآورده می‌شود. روی مجموعه‌ی $A \cup \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ادعا می‌کنیم که مجموعه‌ی زیر از فرمولهای دارای یک متغیر واحد تایپی جزئی است.

$$p'(\bar{\alpha}, x) = \{\theta(\alpha_1, \dots, \alpha_n, x)) | \theta(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in p'\}.$$

در این صورت این تایپ جزئی نیز بنا به فرض استقراء در M توسط عنصری چون α_{n+1} برآورده خواهد شد و به آسانی می‌توان دید که $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ تایپِ p' را برآورده می‌کنند.

برای اثبات ادعا، فرمولهای $\theta_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x)$ را در مجموعه‌ی بالا در نظر بگیرید $(i = 1, \ldots, k)$. برای هر i داریم

$$\exists y \quad \theta_i(x_1, \ldots, x_n, y) \in \exists y p'$$

و از آنجا که p' تایپی کامل است،

$$\bigwedge_i \theta_i(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in p'.$$

بنابراین

$$\exists y \quad \bigwedge_i \theta_i(x_1, \ldots, x_n, y) \in \exists y p'.$$

فرمول بالا بنا به فرض استقراء در M برآورده می‌شود. $\square$

برای هر تئوریِ کاملِ T مدلی ω ـ اشباع لزوماً موجود است:

گزاره ۱۱۵: اگر $T \models \mathfrak{M}$ آنگاه توسیعی مقدماتی مانند $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ موجود است چنانکه $\mathfrak{N}$ مدلی است ω ـ اشباع و $|N| \leq |M|^{\aleph_0}$.

با ترکیب گزاره‌ی بالا با لم لونهایم اسکولم، می‌توان مدلِ $\mathfrak{N}$ را با اندازه‌ی دقیقاًبرابر با $|M|^{\aleph_0}$ به دست آورد.

راهنمایی برای اثبات.

قدم اول: توسیع مقدماتیِ $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ را چنان بیابید که اولاً $|N| \leq |M|^{\aleph_0}$ و ثانیاً برای هر زیرمجموعه‌ی متناهیِ $A \subseteq M$، هر تایپِ $p \in S_1^{\mathfrak{M}}(A)$ در N برآورده شود.

قدم دوم. قدم اول را به مدلِ $\mathfrak{N}$ اعمال کنید.

قدم سوم. بررسی کنید که اگر $\mathfrak{N}_1 \prec \mathfrak{N}_2 \prec \ldots$ زنجیر حاصل‌شده بدین طریق باشد، آنگاه $\bigcup \mathfrak{N}_i$ مدل مطلوب است. $\square$