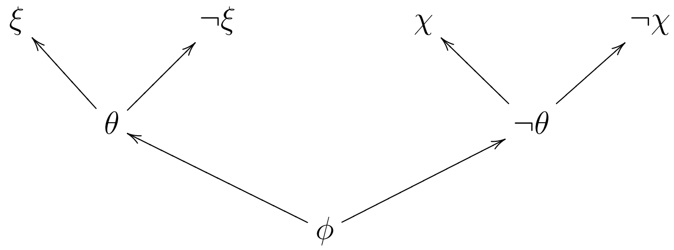
۱۰ تعداد تایپها و درخت

گفتیم که اگر $(s)_{s\in 2^{<\omega}}$ یک درخت باشد، آنگاه تعداد گره‌های آن $\aleph_0$ و تعداد شاخه‌های آن $2^{\aleph_0}$ است. بنابراین اگر در تئوریِ T درختی از فرمولها مانند



موجود باشد که تا نامتناهی ادامه یابد، آنگاه تعداد تایپها در این تئوری بیشتر از یا مساوی با $2^{\aleph_0}$ است. نیز تأکید کردیم که برای ساخت درخت، همواره باید علتی برای شاخه زدن وجود داشته باشد. برای مثال در گزاره‌ی ۱۰۵ علت این که روی ϕ می‌شد انشعاب زد، این بود که $[\phi]$ تایپ ایزوله‌ای در برنداشت. همچنین (تحقیق کنید) که اگر ϕ تایپی ایزوله کند، روی آن نمی‌توان منشعب شد. در درختی که در اثبات گزاره‌ی زیر آمده است، با نوع دیگری از دلایل امکان انشعاب مواجهیم.

گزاره ۱۰۶: اگر $|S_n(T)|>\aleph_0$ آنگاه $|S_n(T)|\geq 2^{\aleph_0}$.

گزاره‌ی بالا را پیشتر در کلاس درس با روشی توپولوژیک ثابت کرده بودیم. در زیر (و در کلاس آموختال) دو اثبات مستقیم (با یک ایده‌ی واحد) برای آن آورده‌ایم.

اثبات اول. اگر تعداد تایپها ناشمارا باشد، فرمولی چون ϕ موجود است که در ناشمارا تایپ واقع شود؛ آن را در ریشه می‌گذاریم.

ادعای ۱۰۷: اگر $[\phi]$ ناشمارا باشد، آنگاه دو تایپِ متفاوتِ p_1,p_2 شاملِ ϕ موجودند، به طوری که برای هر $\psi\in p_i$ مجموعه‌ی $[\psi]$ ناشمارا باشد.

اثبات ادعا. فرمولِ ψ را کوچک بخوانید هرگاه $[\psi]$ شمارا باشد. تعداد تایپهایی که حداقل یک فرمولِ‌کوچک را شاملند، شماراست؛ زیرا زبان شماراست و اندازه‌ی مجموعه‌ی زیر کرانی برای این تعداد است:

$$\bigcup_{\psi\ \text{کوچک}} [\psi]$$

پس در $[\phi]$ تایپهایی یافت می‌شوند که هیچ فرمول کوچکی ندارند. $\square$

فرض کنیم که p_1, p_2 دو تایپ متمایز باشند، هر دو تنها متشکل از فرمولهای غیرکوچک و شاملِ ϕ. فرض کنیم $\psi \in p_1$ و $\neg\psi \in p_2$ دو سر شاخه‌ی یادشده باشند. روی آنها نیز می‌توان دوشاخه شد؛ زیرا آنها نیز فرمولهایی غیرکوچکند. $\square$

اثبات دوم. فرض کنید فرمولِ ϕ در ناشمارا تایپ واقع شده باشد. تحقیق کنید که مجموعه‌ی زیر یک تایپ کامل است:

$$p_1 = \{\psi | \text{ناشماراست } [\phi \wedge \psi]\}$$

بنابراین اگر $\psi \not\in p_1$ آنگاه $[\phi \wedge \neg\psi]$ ناشماراست. پس می‌توان روی ϕ توسط $\psi, \neg\psi$ منشعب شد. همین فرارونْد را برای فرمولهای $\phi \wedge \psi$ و $\phi \wedge \neg\psi$ و الی‌آخر اجرا کنید.

$\square$