۹ جلسه‌ی نهم

تمرین زیر در جلسه‌ی آموختال به طور کامل مورد بحث قرار خواهد گرفت، ولی در اینجا ایده‌ای برای حل آن ارائه کرده‌ایم.

تمرین ۱۰۳: آیا تئوریِ ساختارِ $\langle \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \leq \rangle$ دارای مدل اول است؟

برای پاسخ به سوال بالا، یک اصلبندی کامل برای ساختار یادشده بنویسید (کامل بودن اصلبندی مورد نظر را می‌توانید با به‌کارگیری یک سامانه‌ی رفت‌وبرگشتی تحقیق کنید). ادعا می‌کنیم که ساختارِ $\langle \mathbb{Q}, P, \leq \rangle$ که در آن P به صورت زیر تعریف شده، یک مدل اول برای ساختار یادشده است.

$$P = \{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} | \text{توسط یک عدد اولِ } r_{2k} \text{ عاد می‌شود } q\}$$

در بالا فرض کرده‌ایم که $\{r_n\}$ شمارشی از همه‌ی اعداد اول باشد. نیز در نمایشِ $\frac{p}{q}$ فرض کرده‌ایم که $(p, q) = 1$. با به کارگیری یک سامانه‌ی رفت و برگشتی، نشان دهید که تئوری یادشده $\aleph_0$ ـ جازم است و از این رو، مدلی که در بالا معرفی کرده‌ایم تنها مدل شمارای آن، و از این رو اول است. $\square$

حال به ادامه‌ی درس بازمی‌گردیم. فرض کنید T یک تئوری کامل و فاقد مدل متناهی در زبانِ شمارای L باشد. موارد زیر با هم معادلند:

۱. T دارای مدل اول است.

۲. T دارای مدلی اتمی است.

۳. برای هر $n \in \mathbb{N}$ مجموعه‌ی n ـ تایپهای ایزوله در فضای $S_n(T)$ چگال است.

اثبات. ۳ $\rightarrow$ ۲. فرض کنید $M \models T$ اتمی باشد و $[\phi(x_1, \ldots, x_n)]$ بازی پایه‌ای در $S_n(T)$. معلوم است که $T \cup \{\phi(\bar{x})\}$ سازگار است و از این رو $\bar{a} \in M$ چنان موجود است که $M \models \phi(\bar{a})$. پس $\phi(\bar{x}) \in \mathrm{tp}(\bar{a})$؛ بنا به اتمیک بودن مدلِ M تایپِ $\mathrm{tp}(\bar{a})$ ایزوله است.

۱ $\rightarrow$ ۳. بنا بر آنچه در جلسه‌ی قبل ثابت کردیم، کافی است مدلی شمارا و اتمیک بیابیم. در این کار از رهیافتی توپولوژیک، اما بر پایه‌ی ساختمانهای هنکین بهره پی خواهیم گرفت. درجلسات قبل، قضیه حذف تایپ را به روش مشابهی ثابت کرده بودیم.

قرار دهید

$$X = \{T(C) | \text{یک تئوری کامل در زبانِ } L \cup C \text{ است که } T \text{ را دربردارد } T(C)\}$$

با توپولوژی استون، X فشرده و دارای ویژگیِ بئر است. (بررسی کنید که) مجموعه‌ی Γ_1 تعریف شده در زیر، در X چگال است.

$$\Gamma_1 = \{T(C) | \text{هنکینی است.} \ T(C)\}$$

نیز با کمک ویژگی بئر نشان می‌دهیم که مجموعه‌ی زیر چگال است.

$$\Gamma_2 = \{T(C) | \text{برای هر } \bar{c} \in C \text{ فرمولی کامل چون } \sigma(\bar{c}) \text{ در } T(C) \text{ واقع است}\}$$

(در ادامه به طور دقیق تعریف خواهیم کرد که) منظور از فرمولِ کامل، فرمولی است که تایپی ایزوله کند. برای اثبات چگال بودنِ Γ_2 آن را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\Gamma_2 = \bigcap_{c_1 \ldots c_n \in C} \Gamma_2^{c_1 \ldots c_n}$$

که در آن

$$\Gamma_2^{c_1 \ldots c_n} = \{T(C) | \text{شامل فرمول کاملی چون } \sigma(c_1, \ldots, c_n) \text{ است.}\}$$

به بیان دیگر

$$\Gamma_2^{c_1 \ldots c_n} = \bigcup_{\sigma \text{ فرمولی کامل}} \{T(C) | \sigma(c_1, \ldots, c_n) \in T(C)\}$$

یا $\Gamma_2^{c_1 \ldots c_n} = \bigcup_{\sigma \text{ فرمولی کامل}} [\sigma(c_1, \ldots, c_n)]$. پس Γ_2 اشتراکی شمارا از مجموعه‌های باز و چگال، و از این رو چگال است. هر مدلِ واقع در $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ شمارا و اتمیک است. $\square$

تمرین ۱۰۴: ۱ $\rightarrow$ ۳ را مستقیماً با روش هنکین (و نه با استفاده از روشهای توپولوژیک) ثابت کنید.

تعریف ۱۰۵: فرمولِ $\theta(x_1, \ldots, x_n)$ را نسبت به تئوریِ T **کامل** [۵۷] می‌خوانیم هرگاه

۱. $T \models \exists \bar{x} \quad \theta(\bar{x})$.

۲. برای هر فرمولِ $\phi(\bar{x})$ اگر $T \models \exists \bar{x} \quad (\theta(\bar{x}) \wedge \phi(\bar{x}))$ آنگاه $T \models \forall \bar{x} \quad (\theta(\bar{x}) \rightarrow \phi(\bar{x}))$.

[۵۷] complete

به عبارت دیگر، فرمول $\theta(\bar{x})$ کامل خوانده می‌شود، هرگاه تایپ کاملی ایزوله کند. روی چنین فرمولی، نمی‌توان توسط هیچ فرمول دیگری انشعاب زد؛ یعنی، برای هر فرمولِ $\phi(\bar{x})$ اگر $T\cup\{\theta\wedge\phi\}$ سازگار باشد، آنگاه $T\cup\{\theta\wedge\neg\phi\}$ لزوماً ناسازگار است. عموماً از تکنیک ساخت درخت، در اثبات قضایای مربوط به تعداد تایپها استفاده می‌شود. چنین رویکردی را در جلسه‌های آموختال بیشتر خواهیم کاوید، و در این جا تنها به مثالی از این نوع کاربرد بسنده کرده‌ایم.

گزاره ۱۰۶: اگر تئوریِ T مدل اول نداشته باشد، آنگاه $n \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که $|S_n(T)| \geq ۲^{\aleph_0}$.

به عبارت دیگر، اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $|S_n(T)| = \aleph_0$ آنگاه T دارای مدل اول است.

اثبات. اگر T دارای مدل اول نباشد، $n \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که n ـ تایپهای ایزوله در $S_n(T)$ چگال نیستند. پس بازی چون $[\phi(\bar{x})]$ موجود است، فاقد هیچ تایپ ایزوله‌ای. پس فرمولی چون $\theta(\bar{x})$ چنان موجود است، که هر دو مجموعه‌ی $T\cup\phi\cup\{\theta\}$ و $T\cup\phi\cup\{\neg\theta\}$ سازگار باشند.

$$\begin{tikzcd}
\theta & & \neg\theta \\
& \phi \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

حال توجه کنید که هر دو فرمولِ $\phi\wedge\theta$ و $\phi\wedge\neg\theta$ ناکاملند. علت این است که اگر برای مثال، $\phi\wedge\theta$ تایپی ایزوله کند، این تایپ در $[\phi]$ واقع می‌شود، که این با فرض در تناقض است. بنابراین فرمولی چون ξ موجود است به طوری که $T\cup\phi\cup\{\theta\}\cup\{\xi\}$ و $T\cup\phi\cup\{\theta\}\cup\{\neg\xi\}$ هر دو سازگارند؛ نیز فرمول χ چنان موجود است که $T\cup\phi\cup\{\neg\theta\}\cup\{\chi\}$ و $T\cup\phi\cup\{\neg\theta\}\cup\{\neg\chi\}$ سازگارند. پس بر هر دو گره‌ی درخت بالا می‌توان انشعاب زد:

$$\begin{tikzcd}
\xi & & \neg\xi & & \chi & & \neg\chi \\
& \theta \arrow[ul] \arrow[ur] & & & & \neg\theta \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
& & & \phi \arrow[ull] \arrow[urr] & & &
\end{tikzcd}$$

فراروند بالا را می‌توان ادامه داد و به یک درخت نامتناهی رسید. از آنجا که تعداد گره‌های هر درختِ

اینچنین $\aleph_0$ و تعداد شاخه‌های آن $2^{\aleph_0}$ است و هر شاخه از درخت یک تایپ کامل مشخص می‌کند، تعداد تایپها، حداقل $2^{\aleph_0}$ است. □