۸ جلسه‌ی هشتم

هدف از بحثهای این جلسه، ارائه‌ی دسته‌بندی‌ای است برای تئوریها بر حسب برآورده شدن یا نشدن تایپها در آنها. در این نوع دسته‌بندی، مدلهایی را که حداقل تعدادِ تایپ در آنها محقَق شود، کوچک، و آنهایی را که حداکثر تعداد تایپها را برآورده کنند، بزرگ خواهیم دانست.

تعریف ۸۷: گیریم T کامل باشد و $\mathfrak{M} \models T$.

۱. مدلِ $\mathfrak{M}$ را اتمیک می‌خوانیم هرگاه برای هر $a_1, \ldots, a_n \in M$ تایپِ $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n)$ ایزوله باشد. در یک مدل اتمیک، تعداد تایپهایی که برآورده می‌شوند، حداقلِ ممکن است.

۲. مدلِ $\mathfrak{M}$ را اول [۵۶] می‌خوانیم هرگاه به صورت مقدماتی (یعنی به وسیله‌ی نگاشتی مقدماتی) در همه‌ی مدلهای T بنشیند.

در ادامه‌ی این بحث، زبان را شمارا در نظر گرفته‌ایم.

گزاره ۸۸: هر مدلِ اول، اتمیک است.

اثبات. مدلِ اولِ $\mathfrak{M}$ را در نظر بگیرید. اگر $\mathfrak{M}$ اتمیک نباشد، $a_1, \ldots, a_n \in M$ چنان یافت می‌شوند که $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n)$ ایزوله نباشد. از آنجا که زبان شماراست، بنا به قضیه‌ی حذف تایپها، تایپِ یادشده در مدلی شمارا مانند $\mathfrak{N} \models T$ حذف می‌شود. از طرفی $\mathfrak{M}$ در این مدل، مثلاً توسط نگاشتِ مقدماتیِ f، به طور مقدماتی نشسته است؛ یعنی $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{N}}(f(a)_1, \ldots, f(a_n))$، و این حذف شدن تایپ را ناقض است. □

گزاره ۸۹: موارد زیر با هم معادلند:

۱. $\mathfrak{M}$ مدلی اول است.

۲. $\mathfrak{M}$ مدلی اتمیک و شماراست.

اثباتِ ۲ $\rightarrow$ ۱ را به دانشجو وامی‌گذاریم. برای اثباتِ ۱ $\rightarrow$ ۲ فرض کنید $M = (a_i)_{i \in \omega}$ مدلی اتمیک و شمارا باشد و $T \models \mathfrak{N}$ مدلی دلخواه. از آنجا که $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a.)$ ایزوله است، در هر مدلی و از

[۵۶] prime

جمله در $\mathfrak{N}$ برآورده می‌شود. از این رو عنصرِ $b_\circ \in \mathfrak{N}$ چنان موجود است که $a_\circ \equiv b_\circ$؛ که منظور از علامت یادشده، عبارت زیر است:

$$\langle \mathfrak{M}, a_\circ \rangle \equiv \langle \mathfrak{N}, b_\circ \rangle.$$

حال اگر $b_\circ, \ldots, b_{n-1} \in N$ چنان یافت شده باشند که

$$b_\circ, \ldots, b_{n-1} \equiv a_\circ, \ldots, a_{n-1} \quad (*)$$

آنگاه، نشان می‌دهیم که عنصرِ $b_n \in N$ چنان موجود است که

$$a_\circ, \ldots, a_n \equiv b_\circ, \ldots, b_n.$$

فرض کنیم تایپِ $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_\circ, \ldots, a_n)$ توسط فرمولِ $\phi(x_\circ, \ldots, x_n)$ ایزوله شده باشد. از $\mathfrak{M} \models \phi(a_\circ, \ldots, a_n)$ نتیجه می‌شود که

$$\mathfrak{M} \models \exists x \quad \phi(a_\circ, \ldots, a_{n-1}, x).$$

بنا به $(*)$ داریم

$$\mathfrak{N} \models \exists x \quad \phi(b_\circ, \ldots, b_{n-1}, x)$$

تمرین ۹۰: نشان دهید که اگر $\mathfrak{N} \models \phi(b_\circ, \ldots, b_n)$ آنگاه

$$\langle \mathfrak{N}, b_\circ, \ldots, b_n \rangle \equiv \langle \mathfrak{M}, a_\circ, \ldots, a_n \rangle$$

تمرین ۹۱: نشان دهید که نگاشت $f : M \to N$ که هر a_i را به b_i می‌برد، مقدماتی است.

دیدیم که طبق تعریف، هر مدل اول به طور مقدماتی در سایر مدلها می‌نشیند. بنابراین اگر $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ دو مدل اول باشند، هر یک به طور مقدماتی در دیگری می‌نشیند؛ ولی از این ایزومرف بودنِ $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ نتیجه نمی‌شود.

تمرین ۹۲: مثالی از دو ساختارِ $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ بزنید که ایزومرف نیستند ولی به طور مقدماتی در یکدیگر می‌نشینند.

با این همه، در زبان شمارا، این مطلوب برقرار است.

تمرین ۹۳: نشان دهید که اگر $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ دو مدل اول برای T باشند، آنگاه $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$.

در ادامه به بررسی چند مثال پرداخته‌ایم.

مثال ۹۴: قبلاً دیده‌ایم که در $T = DLO$ مجموعه‌ی $S_n(T)$ متناهی است، و در نتیجه همه‌ی تایپها در این تئوری ایزوله هستند. از این رو همه‌ی مدلهای DLO اتمیک هستند؛ به ویژه $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ یگانه مدلِ اول برای آن است.

بعداً ثابت خواهیم کرد که تمام مدلهای یک تئوریِ $\aleph_0$ ـ جازم اتمیک هستند و یگانه مدلِ شمارای یک‌چنین تئوری‌ای، همواره اول است.

مثال ۹۵: در تئوریِ روابط تک‌موضعی مستقل دیدیم که $S_1(T)$ شامل هیچ تایپ ایزوله‌ای نیست. از این رو هیچیک از مدلهای تئوریِ یادشده اتمیک نیستند، و به ویژه این تئوری دارای مدل اول نیست.

مثال ۹۶: در زبانِ $L = \{E\}$ تئوریِ T را به گونه‌ای در نظر بگیرید که بیانگر این باشد که E رابطه‌ای هم‌ارزی است با نامتناهی کلاس و هر کلاس از این رابطه نیز نامتناهی است.

تمرین ۹۷: نشان دهید تئوری یادشده کامل، دارای حذف سور، و $\aleph_0$ ـ جازم است (مورد آخر یعنی هر دو مدل شمارا از این تئوری با هم ایزومرفند).

حال زبانِ $L = \{E_1, E_2, \ldots\}$ و تئوریِ T در آن را در نظر بگیرید که بگوید که هر E_i یک رابطه‌ی هم‌ارزی است و همه‌ی کلاسهای آن نامتناهی است و به‌علاوه هر E_i توسط E_{i+1} تظریف می‌شود؛ یعنی $E_{i+1} \subseteq E_i$.

تمرین ۹۸: نشان دهید T کامل و دارای حذف سور است ولی $\aleph_0$ ـ جازم نیست.

تمرین ۹۹: نشان دهید که تایپِ جزئیِ $\Sigma(x, y)$ متشکل از فرمولهای $\{E_i(x, y)\}_{i \in \omega}$ و فرمولِ $x \neq y$ غیرایزوله است.

تمرین ۱۰۰: نشان دهید تئوری یادشده دارای مدل اول است و در این مدل اول،

$$x = y \leftrightarrow \bigwedge_{i \in \omega} E_i(x, y).$$

دقت کنید که رابطه‌ی

$$E_\infty := \bigwedge E_i(x, y)$$

خود نیز یک رابطه‌ی هم‌ارزی است که بنا به تمرین بالا، تعبیر آن در مدل اول، تساوی است. (در مدلِ اشباع این تئوری، رابطه‌ی یادشده دارای نامتناهی کلاس است).

تا اینجا با مدل اول آشنا شده‌ایم و دانسته‌ایم که هر مدل اتمیکِ شمارا اول است. در زیر محکی برای وجودِ چنین مدلی ارائه کرده‌ایم.

قضیه ۱۰۱ (وجود مدل اول): موارد زیر با هم معادلند.

۱. T دارای مدل اول است.

۲. T دارای مدل اتمیک است.

۳. برای هر $n \in \mathbb{N}$ مجموعه‌ی متشکل از تایپهای کاملِ ایزوله، در $S_n(T)$ چگال است.

توجه کنید که وجود مدل اول، متضمن کم بودن تعداد تایپها نیست؛ کمااینکه در $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$ دیدیم که $S_۱(T) = ۲^{\aleph_۰}$ و داریم

تمرین ۱۰۲: نشان دهید که $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, ۰, ۱ \rangle$ مدلی اول برای تئوری یادشده است.