۷ جلسه‌ی هفتم

قضیه ۸۳: در زبان شمارای L اگر $|S_n(T)| > \aleph_0$ آنگاه $|S_n(T)| = 2^{\aleph_0}$.

در صورت پذیرش فرضیه‌ی پیوستار، قضیه‌ی بالا بدیهی است. بنا به فرضیه‌ی پیوستار اگر $\aleph_0 < \kappa \leq 2^{\aleph_0}$ آنگاه $\kappa = 2^{\aleph_0}$؛ به بیان دیگر $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. فرضیه‌ی پیوستار از اصول ZFC برای نظریه‌ی مجموعه‌ها مستقل است، یعنی خود و نقیضش با ZFC سازگارند. با وجود این، برخی زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی در همان ZFC فرضیه‌ی پیوستار را برآورده می‌کنند. برای مثال اگر $X \subseteq \mathbb{R}$ مجموعه‌ای بسته باشد آنگاه X یا شماراست یا $|X| = 2^{\aleph_0}$. نیز اگر $X \subseteq \mathbb{R}$ بورل باشد، آنگاه X فرضیه‌ی پیوستار را برآورده می‌کند. بررسی اینگونه خوشرفتاریِ زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی رسالت شاخه‌ای از ریاضیات است به نام نظریه‌ی توصیفی مجموعه‌ها. [52]

قضیه ۸۴ (کانتور ـ بندیکسون): هر زیرمجموعه‌ی بسته‌ی A از فضای متریک تام [53] و جدائی‌پذیرِ (X, d) را می‌توان به صورت اجتماع مجزایی چون $U_1 \cup U_2$ نوشت که در آن U_1 مجموعه‌ای شمارا و باز (در A با توپولوژی زیرفضایی) است و U_2 یک مجموعه‌ی بسته‌ی کامل. [54]

مجموعه‌ی بسته‌ی C را کامل می‌خوانیم هرگاه همه‌ی نقاط آن حدی باشند؛ به بیان دیگر هرگاه هیچ نقطه‌ی ایزوله‌ای نداشته باشد. (ثابت کنید که) هر زیرمجموعه‌ی بسته‌ی کامل از X دارای اندازه‌ی $2^{\aleph_0}$ است. بنابر قضیه‌ی کانتور ـ بندیکسون، [55] هر زیرمجموعه‌ی بسته (تحت شرایط آن قضیه) یا شماراست یا دارای اندازه‌ی $2^{\aleph_0}$.

اثبات قضیه‌ی ۸۳ . می‌دانیم که $S_n(T)$ فشرده و جدائی‌پذیر، و از این رو لهستانی است. پس بنا به قضیه‌ی کانتور ـ بندیکسون، $S_n(T)$ یا شمارا و یا دارای اندازه‌ی $2^{\aleph_0}$ است. □

تمرین ۸۵: اثبات نوشته‌شده در کتاب دیوید مارْکِر را برای این قضیه فرابگیرید.

---

[52] descriptive set theory
[53] complete
[54] perfect
[55] Cantor - Bendixon

۱.۷ تئوری رابطه‌های تک‌موضعیِ مستقل

تئوریِ T را در زبانِ $L = \{p_1(x), p_2(x), \ldots, \}$ مشتمِل بر اصول‌موضوعه‌ی زیر، برای عناصرِ دوبه‌دومتفاوتِ $i_1, \ldots, i_n, j_1, \ldots, j_k \in \mathbb{N}$ در نظر بگیرید:

$$\theta_{i_1,\ldots,i_n,j_1,\ldots,j_k} : \quad \exists x \quad \left(\bigwedge_{i=i_1,\ldots,i_n} p_i(x) \wedge \bigwedge_{j=j_1,\ldots,j_n} \neg p_j(x) \right)$$

نخست توجه کنید که T سازگار است: ساختارِ $\langle \mathbb{N}, p_0^{\mathbb{N}}, p_1^{\mathbb{N}}, \ldots \rangle$ که در آن گرفته‌ایم

$$p_0^{\mathbb{N}} = \text{مضارب ۲}$$

$$\vdots$$

$$p_k^{\mathbb{N}} = \text{مضاربِ } k \text{ اُمین عدد اول}$$

مدلی برای T است.

تمرین ۸۶:

- نشان دهید که T دارای حذف سور است.
- نشان دهید که

$$T \models \exists^\infty x \quad p_n(x).$$

هر تایپِ کامل در $S_1(T)$ دقیقاً تعیین می‌کند که x در کدام p_n ها واقع و در کدام ناواقع است. بنابراین برای هر $I \subseteq \mathbb{N}$ مجموعه‌ی $p_I(x)$ تعریف‌شده در زیر یک تایپ کامل مشخص می‌کند:

$$p_I(x) = \{p_i(x) | x \in I\} \cup \{\neg p_j(x) | j \notin I\}.$$

پس $|S_1(T)| = 2^{\aleph_0}$؛ و در نتیجه تئوری یادشده $\aleph_0$ـ جازم نیست (بنا به قضیه‌ای که در جلسات بعد ثابت خواهیم کرد). هر p_I تایپی غیرایزوله است و در جلسه‌ی بعد نشان خواهیم داد که در نتیجه‌ی این، تئوری T هیچ مدل اولی ندارد.