۶ جلسه‌ی ششم، حذف تایپها

در جلسه‌ی پیش گفتیم که تایپِ $p(\bar{x})$ ایزوله است هرگاه تنها تایپِ شاملِ یک فرمولِ $\phi(\bar{x}) \in p$ باشد. هر تایپِ ایزوله‌ی $p(\bar{x})$ در تمام مدلهای T برآورده می‌شود [۴۲]: عناصری چون $a_1, \ldots, a_n$ که فرمولِ ایزوله‌کننده‌ی ϕ را برآورده می‌کنند، کُلِ تایپ را نیز برآورده می‌کنند. عکس این گفته تنها در صورتی برقرار است که زبان، شمارا باشد؛ یعنی اگر L زبانی شمارا باشد و T مدلی کامل در آن و $p(\bar{x})$ در همه‌ی مدلهای T برآورده شود، آنگاه $p(\bar{x})$ ایزوله است. باز به بیانی دیگر، اگر $p(\bar{x})$ تایپی غیرایزوله باشد، آنگاه مدلی چون $T \models \mathfrak{M}$ چنان موجود است که p در آن برآورده نمی‌شود؛ اصطلاحاً p در مدلِ $\mathfrak{M}$ حذف می‌شود [۴۳].

گفتیم که تایپِ p را می‌توان مجموعه‌ای نامتناهی از فرمولها در نظر گرفت. پس برآورده شدن آن در $\mathfrak{M}$ یعنی

$$\mathfrak{M} \models \exists \bar{x} \quad \bigwedge_{\phi \in p} \phi(\bar{x}),$$

و حذف شدن آن یعنی

$$\mathfrak{M} \models \forall \bar{x} \quad \bigvee_{\phi \in p} \neg\phi(\bar{x});$$

پس حذف شدن p در $\mathfrak{M}$ معادل این است که برای هر $a_1, \ldots, a_n \in M$ فرمولی چون $\phi(\bar{x}) \in p$ موجود باشد، به طوری که

$$\mathfrak{M} \models \neg\phi(\bar{a}).$$

قضیه ۷۴ (حذف‌تایپها): گیریم L زبانی باشد شمارا و T یک تئوریِ کامل در آن. اگر تایپِ $p(\bar{x})$ غیرایزوله باشد، آنگاه مدل شمارای $T \models \mathfrak{M}$ چنان موجود است که p در آن حذف شود.

نکته ۷۵: قضیه‌ی بالا برای زبانهای ناشمارا برقرار نیست؛ مثال نقض آن را در جلسات بعد ارائه خواهیم کرد.

معمولاً برای اثبات قضیه‌ی یادشده از ساختهای هنکینی استفاده می‌شود. اثبات قضیه را بدین روش، به عنوان یکی از پروژه‌ها به دانشجویان واگذاشته‌ایم تا در این جا به اثباتی توپولوژیک [۴۴]

[۴۲] is realised

[۴۳] is omitted

[۴۴] هر چند در این اثبات نیز از ساختمانهای هنکینی بهره خواهیم جست!

بپردازیم.

نکته ۷۶: قضیه‌ی حذف تایپها [45] برای تعداد شمارا تایپ غیرایزوله به صورت همزمان و در تعدادی شمارا متغیر نیز برقرار است (و مدل مورداشاره در آن همچنان شماراست).

یادآوری ۷۷: فضای توپولوژیکِ هاسدورفِ (X, τ) را دارای ویژگیِ بئر [46] می‌خوانیم هرگاه در آن هر اشتراک شمارا از مجموعه‌های بازِ چگال، چگال باشد.

معادلاً (X, τ) ویژگی بئر دارد هرگاه در آن هر اجتماع شمارا از مجموعه‌های بسته‌ی هیچجاچگال [47] هیچجاچگال باشد. [48] نیز از آنالیز مقدماتی به خاطر دارید که هر فضای متریکِ کامل دارای ویژگی بئر است.

برای زبان شمارای L مجموعه‌ی

$$X_L := \mathrm{Th}_L = \{T \mid T \text{ یک تئوری کامل در زبان } L \text{ است}\}$$

را به همراه پایه‌ی توپولوژیکِ

$$B = \{[\phi] \mid \phi \text{ یک جمله در زبانِ } L \text{ است}\}$$

در نظر بگیرید. فضای یادشده، فشرده و دارای پایه‌ای شمارا و از این رو جدایی‌پذیر [49] است. [50] هر فضای فشرده‌ی جدایی‌پذیر، لهستانی [51] است؛ یعنی هومئومرف است با یک فضای متریک کامل جدائی‌پذیر. پس X_L به ویژه دارای ویژگی بئر است.

زبان شمارایِ L را با مجموعه‌ی شمارای C از ثوابت گسترش می‌دهیم تا به زبانِ $L(C) = L \cup C$ برسیم. تعریف می‌کنیم

$$X^{L(C)} = \{T(C) \mid T(C) \text{ یک تئوری کاملِ شاملِ } T \text{ در زبانِ } L(C) \text{ است}\}.$$

[45] omitting type theorem

[46] Baire property

[47] nowhere-dense

[48] منظور از مجموعه‌ی هیچجاچگال است آن است که بستارش هیچ نقطه‌ی درونی ندارد.

[49] separable

[50] جدائی‌پذیر بودن یعنی دارا بودن یک زیرمجموعه‌ی شمارای چگال.

[51] Polish space

تمرین ۷۸: (به طور مستقیم) نشان دهید که $X^{L(C)}$ فشرده است.

فضای $X^{L(C)}$ فشرده، جدائی‌پذیر و دارای ویژگی بئر است. قرار دهید

$\Gamma_1 = \{T(C) \in X^{L(C)}|$

$T(C)$ یک تئوری هنکینی در زبانِ $L(C)$ است که جهانش مجموعه‌ی C است و در همین مجموعه شاهددار است.

یادآوری می‌کنیم که تئوریِ T یک تئوریِ دارای شواهد در C است هرگاه برای هر فرمولِ $\phi(x, c_1, \ldots, c_n)$ ثابتِ $c_\phi^{c_1,\ldots,c_n}$ موجود باشد به طوری که

$$T(C) \models \exists x \phi(x, c_1, \ldots, c_n) \to \phi(c_\phi^{c_1,\ldots,c_n}, c_1, \ldots, c_n).$$

تمرین ۷۹: روش هنکین را برای به دست آوردن یک تئوری دارای شواهد در یک مجموعه‌ی C مرور کنید.

تمرین ۸۰: نشان دهید (با استفاده‌ی مستقیم از تعاریف که) Γ_1 در $X^{L(C)}$ چگال است.

فرض کنید $p(\bar{x})$ تایپی غیرایزوله باشد و قرار دهید

$\Gamma_2 = \{T(C) \in X^{L(C)}|$

برای هر $c_1, \ldots, c_n \in C$ فرمولِ $\sigma(\bar{x}) \in p(\bar{x})$ چنان موجود است که $\neg\sigma(c_1, \ldots, c_n) \in T(C)\}$.

ادعای ۸۱: Γ_2 چگال است.

از ادعا نتیجه خواهد شد که $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ چگال، و بالاخص ناتهی است. هر مدلی از یک تئوریِ هنکینیِ $T(C) \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ تایپِ p را حذف می‌کند.

اثبات ادعا. داریم

$$\Gamma_2 = \bigcap_{c_1,\ldots,c_n \in C} \Gamma_2^{c_1,\ldots,c_n}$$

که در آن گرفته‌ایم

$$\Gamma_2^{c_1,\ldots,c_n} = \{T(C)|\ \neg\sigma(c_1, \ldots, c_n) \in T(C) \text{ موجود است به طوری که } \sigma(\bar{x}) \in p\}.$$

ادعا می‌کنیم که هر $\Gamma_{2}^{c_1,\ldots,c_n}$ باز و چگال است؛ آنگاه ویژگی بئر ما را به مطلوب می‌رساند.

باز بودن. داریم

$$\Gamma_{2}^{c_1,\ldots,c_n} = \bigcup_{\sigma \in p} \Gamma_{2}^{c_1,\ldots,c_n,\sigma}$$

که در آن منظور از $\Gamma_{2}^{c_1,\ldots,c_n,\sigma}$ مجموعه‌ی زیر است:

$$\{T(C) | \neg\sigma(c_1,\ldots,c_n) \in T(C)\}.$$

مجموعه‌ی بالا یک باز پایه‌ای است.

چگال بودن. برای اثبات چگال بودن، باید نشان دهیم که $\Gamma_{2}^{c_1,\ldots,c_n}$ با هر باز پایه‌ایِ $[\theta(c'_1,\ldots,c'_n)]$ اشتراک ناتهی دارد. یعنی برای هر جمله‌ی $\theta(c'_1,\ldots,c'_n)$ باید تئوریِ $T(C)$ و فرمولِ $\sigma(\bar{x}) \in p$ را چنان یافت که $\theta(c'_1,\ldots,c'_n) \wedge \neg\sigma(c_1,\ldots,c_n) \in T(C)$.

اگر $\theta \in p(\bar{x})$ آنگاه از آن جا که p غیرایزوله است فرمولِ $\sigma \in p$ یافت می‌شود که از θ نتیجه نشود. پس $T \cup \{\neg\sigma, \theta\}$ سازگار است. پس تئوریِ هنکینی‌ای شامل $T \cup \{\neg\sigma, \theta\}$ یافت می‌شود، و این همان مطلوب است.

اگر $\neg\theta \in p$. اگر برای هر $\sigma \in p$ تئوریِ $T \cup \{\neg\sigma, \theta\}$ ناسازگار باشد، آنگاه برای هر $\sigma \in p$ داریم

$$T \models \theta \to \sigma;$$

یعنی تایپِ p ایزوله است، که این تناقض است. □