۵ جلسه‌ی پنجم، مثالهایی از تایپها

پیش از آن که به هدف این جلسه، یعنی بررسی چند مثال از تایپها بپردازیم، نکته‌ی زیر را درباره‌ی توپولوژی استون متذکر می‌شویم.

نکته ۶۹: فرض کنید $\langle B, \wedge, \vee, ۰, ۱\rangle$ یک جبر بولی باشد، که روی آن ترتیب $a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$ تعریف شده است. زیرمجموعه‌ی $A \subseteq B$ را یک فیلتر، یا یک پالایه می‌خوانیم هرگاه اصول زیر درباره‌ی آن صادق باشند.

- $a \in A \to \forall b \geq a \quad b \in A$
- $a, b \in A \to a \wedge b \in A$
- $۰ \notin A$.

مفهوم فیلتر، دوگان مفهوم ایده‌آل است (یک جبر بولی را می‌توان حلقه‌ای با مشخصه‌ی صفر در نظر گرفت. ایده‌آل در این بافتار معنا می‌یابد). فیلترِ A را یک فرافیلتر می‌خوانیم هرگاه برای هر $a, b \in B$ از $a \wedge b \in A$ نتیجه شود که $a \in A$ یا $b \in A$.

برای جبر بولیِ B قرار می‌دهیم

$$\max(B) = \{A \subseteq B | \text{است } B \text{ یک فرافیلتر روی } A\}$$

روی $\max(B)$ مجموعه‌های زیر تشکیل پایه‌ای برای یک توپولوژی می‌دهند که آن را توپولوژی استون می‌خوانند:

$$[a] = \{A \in \max(B) | a \in A\}.$$

این توپولوژی، فشرده و تماماً ناهمبند است.

توپولوژی استون در فضایِ $S_n(T)$ نیز از توپولوژی استون جبری به دست می‌آید روی جبر لیندنبام ـ تارسکی که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B_n(T) = \{[\phi(\bar{x})]_\sim | \phi(\bar{x}) \in Formul\}$$

که در آن منظور از $[\phi(\bar{x})]_\sim$ کلاس فرمولِ ϕ تحت رابطه‌ی هم‌ارزی زیر است:

$$\phi(\bar{x}) \sim \psi(\bar{x}) \Leftrightarrow T \models \forall \bar{x} \quad \phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x})$$

و تعریف کرده‌ایم

$$[\phi]_\sim \wedge [\psi]_\sim = [\phi \wedge \psi]_\sim$$
$$[\phi]_\sim \vee [\psi]_\sim = [\phi \vee \psi]_\sim$$
$$۰ = [x \neq x]_\sim$$
$$۱ = [x = x]_\sim$$

تمرین ۷۰: نشان دهید که ابرفیلترها در $B_n(T)$ همان تایپهای کامل هستند.

مثال ۷۱ (تایپها در DLO): تئوریِ DLO، یا تئوری مجموعه‌های مرتب خطی بدون ابتدا و انتها، در زبانِ $L = \{\leq\}$ به صورت زیر اصلبندی می‌شود.

- $\forall x \quad x \leq x$.
- $\forall xy \quad x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y$
- $\forall xyz \quad x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z$.
- $\forall xy \quad x \leq y \vee y \leq z$
- $\forall xy \quad x \leq y \rightarrow \exists x \quad x < z < y$.
- $\forall x \quad \exists y_1 y_2 \quad y_1 < x < y_2$.

به عنوان مثال $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ و $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ دو مدل از DLO هستند.

با استفاده از سامانه‌های رفت و برگشتی (به تمرینهای سری نخست و دوم مراجعه کنید) می‌توان نشان داد که تئوریِ DLO سورها را حذف می‌کند و $\aleph_0$ـ جازم است؛ این دومی یعنی هر دو مدل شمارا از DLO با هم ایزومرفند. در ادامه برآنیم تا تایپها را در DLO بشناسانیم.

نخست به بررسی $S_1(DLO)$ می‌پردازیم. بنا به حذف سور، هر فرمول معادل است با فصلی متناهی از عطفهای متناهی فرمولهای اتمی. فرمولهای اتمی و نقیض اتمیِ با تک متغیرِ x (و بدون پارامتر) تنها به یکی از صُوَرِ زیرند:

- $x \leq x$.
- $x = x$.
- $\neg(x \leq x)$
- $\neg(x = x)$.

توجه کنید که اگر $p_۱, p_۲$ دو تایپِ متفاوت باشند، از آنجا که تایپ کامل، مجموعه‌ای ماکزیمال از فرمولهاست، باید فرمولی چون $\phi(x)$ موجود باشد که ایندو را از هم متمایز کند؛ یعنی $\phi \in p_۱$ و $\neg\phi \in p_۲$. سه نوعِ فرمول بالا با هم سازگارند (و فرمول آخر نمی‌تواند در هیچ تایپی باشد چون ناسازگار است)؛ پس $|S_۱(DLO)| = |[x = x]| = |[x \leq x]| = ۱$.

حال به $S_n(DLO)$ می‌پردازیم. گیریم $\mathfrak{M} \models DLO$ و $a_۱, \ldots, a_n \in M$. قرار می‌دهیم

$$\text{Diag}(x_۱, \ldots, x_n)_{a_۱,\ldots,a_n} := \text{qftp}(a_۱, \ldots, a_n) = \{\phi(x_۱, \ldots, x_n) | M \models \phi(a_۱, \ldots, a_n), \text{ اتمی یا نقیض اتمی است } \phi\}$$

بنا به حذف سور، $\text{Diag}(x_۱, \ldots, x_n)_{a_۱,\ldots,a_n}$ را $\text{tp}(a_۱, \ldots, a_n)$ به طور کامل مشخص می‌کند؛ یعنی

$$\{\text{tp}(a_۱, \ldots, a_n)\} = [\bigwedge_{\phi \in \text{Diag}(x_۱,\ldots,x_n)_{a_۱,\ldots,a_n}} \phi]$$

بنابراین برای هر $n \in \mathbb{N}$ مجموعه‌ی $S_n(DLO)$ متناهی است.

در جلسات آینده قضیه‌ی ریل نارْدِوِسْکی [۴۰] را ثابت خواهیم کرد که بنا به آن، هر تئوری کامل، $\aleph_۰$ـ جازم است اگروتنهااگر تعداد n تایپها در آن متناهی باشد.

حال به بررسی تایپهای دارای پارامتر می‌پردازیم. مدلِ $T \models \langle\mathbb{Q}, \leq\rangle$ را در نظر گرفته قرار دهید $T_{\mathbb{Q}} = \text{Th}(\langle\mathbb{Q}, \leq, r\rangle_{r \in \mathbb{Q}})$. طبیعتاً زبانِ این تئوری دارای ثوابتِ $\{c_r\}_{r \in \mathbb{Q}}$ و از این رو هر مدل از تئوریِ یادشده، توسیعی مقدماتی از $\langle\mathbb{Q}, \leq\rangle$ است. به آسانی می‌توان تحقیق کرد که $T_{\mathbb{Q}}$ سورها را حذف می‌کند (از آنجا که DLO چنین است). فرمولهای اتمی و نقیض اتمیِ تک‌متغیره در این حالت، به یکی از صُوَر زیرند:

- $x \leq x$

[۴۰] Ryll-Nardewski

- $.x = x$
- $x < c_r$
- $.x \geq c_r$
- $.x = c_r$

برای تایپِ $p(x)$ در $S_1(T_{\mathbb{Q}})$ حالات زیر متصوَر است.

اگر $r \in \mathbb{Q}$ موجود باشد، به طوری که $``x = c_r" \in p$، آنگاه واضح است که

$$[x = r] = \{p(x)\}.$$

اگر برای هر $r \in \mathbb{Q}$ داشته باشیم $``x \neq c_r" \in p$ آنگاه مجموعه‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$U_p = \{s \in \mathbb{Q} | ``x < s" \in p\}$$
$$L_p = \{s \in \mathbb{Q} | ``x > s" \in p\}$$

توجه کنید که $L_p \cap U_p = \emptyset$؛ نیز اگر $x < s \in p$ و $x > c_t \in p$ آنگاه $T_{\mathbb{Q}} \vdash t < s$. بنابراین $L_p < U_p$. نیز $L_p \cup U_p = \mathbb{Q}$.

اگر $U_p = \emptyset$ آنگاه $T_{\mathbb{Q}} \cup \{x > c_t\}_{t \in \mathbb{Q}}$ سازگار است و p را تایپِ $+\infty$ می‌خوانیم. این تایپ بیانگر بزرگتر بودنِ x ازهمه‌ی $r \in Q$ است.

به طور مشابه تایپِ $p = -\infty$ در حالتی که $L_p = \emptyset$ تعریف می‌شود.

اگر هر دوی L_p, U_p ناتهی باشند و L_p داری ماکزیزمم باشد و $\max L_p = r$ آنگاه p را با r^+ نشان می‌دهیم. این تایپ بیانگر نزدیکیِ بودن x از طرف راست به عدد گویای r است.

به طور مشابه تایپ r^- در صورتی که U_p دارای عنصر کمینه باشد تعریف می‌شود.

در صورتی که نه U_p مینیموم داشته باشد و L_p ماکزیموم، تایپ p را تایپ اصم می‌خوانیم. تعداد اینگونه تایپها $2^{\aleph_0}$ است.

مطالب بالا را به صورت زیر جمعبندی می‌کنیم:

$$S_1(\mathbb{Q}) = S_1(T_{\mathbb{Q}}) = \{-\infty\} \cup \{+\infty\} \cup \{x = r\}_{r \in \mathbb{Q}} \cup \{r^-\}_{r \in \mathbb{Q}} \cup \{r^+\}_{r \in \mathbb{Q}} \cup \{r\}_{\text{اصم } r}.$$

بنابراین $|S_1(T_{\mathbb{Q}})| = 2^{\aleph_0}$؛ یعنی در این تئوری تعداد تایپهای تک‌متغیره حداکثرِممکن است.

مثال ۷۲ (تایپها در حساب پئانو): هدفمان بررسی تایپهای تک‌متغیره در $T_{\mathbb{N}} := \mathrm{Th}(\mathbb{N}, \{n\}_{n\in\mathbb{N}})$ است. فرمولِ $\theta(x,y)$ را در نظر بگیرید که

$$(\alpha,\beta) \models \theta \Leftrightarrow \alpha|\beta.$$

برای یک زیرمجموعه‌ی دلخواهِ A از اعداد اول، مجموعه‌ی زیر از فرمولها را در نظر بگیرید:

$$\pi_A = \{``p|x" : p \in A\} \cup \{``p \not| x" : p \notin A\}.$$

واضح است که $T_{\mathbb{N}} \cup \pi_A$ سازگار است، پس مجموعه‌ی یادشده یک تایپ جزئی است. توجه کنید که اگر $A_1 \neq A_2$ دو زیرمجموعه از اعداد اول باشند آنگاه $\pi_{A_1} \cup \pi_{A_2} \cup T_{\mathbb{N}}$ ناسازگار است. بنابراین تایپهای کاملِ $\mathbb{P}_{A_1}, \mathbb{P}_{A_2}$ که از تکمیل تایپهای جزئی یادشده حاصل می‌آیند، با هم متفاوتند؛ یعنی به اندازه‌ی تعداد زیرمجموعه‌های اعداد اول می‌توان تایپ کامل پیدا کرد. پس

$$S_1(T_{\mathbb{N}}) = 2^{\aleph_0}.$$

در جلسات آینده علاوه بر آوردن مثالهای دیگری از تایپها، به تحلیل تئوریها با کمک توپولوژی استون روی فضای تایپهایشان خواهیم پرداخت.

تعریف ۷۳ (تایپهای ایزوله): تایپِ $p(\bar{x}) \in S_n(T)$ را یک تایپِ **ایزوله** [41] می‌خوانیم هرگاه به عنوان عنصری از $S_n(T)$ در توپولوژی استون ایزوله باشد؛ یعنی $\{p\}$ مجموعه‌ای باز باشد. بنابراین اگر p ایزوله باشد، آنگاه فرمولِ $\phi \in p$ چنان موجود است که $\{p\} = [\phi]$.

وقتی تایپِ p توسط فرمول ϕ ایزوله شود (یعنی هرگاه که $\{p\} = [\phi]$) فرمول یادشده تکلیف تایپ را به طور کامل مشخص می‌کند؛ به بیان دیگر برای هر فرمولِ $\psi(\bar{x}) \in p$ داریم

$$T \models \forall x \quad (\phi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x})).$$

در DLO همه‌ی تایپها ایزوله‌اند، زیرا تعداد تایپها متناهی است و از این رو همه‌ی نقاط به لحاظ توپولوژیک ایزوله‌اند. اگر $S_n(T)$ نامتناهی باشد، حتماً دارای یک نقطه‌ی غیرایزوله است (زیرا توپولوژی استون فشرده است و اگر قرار باشد همه‌ی تایپها ایزوله باشند، پوششی نامتناهی از متشکل از مجموعه‌های باز تک‌نقطه‌ای برای $S_n(T)$ یافت می‌شود که دارای هیچ زیرپوشش متناهی‌ای نباشد).

[41] isolated type