۴ فضای تایپها

تایپها مصداق نظریه‌ی مدلی ایده‌ی آشنای شناخت «ذات» از روی «صفات» هستند. در نظریه‌ی مدل نیز گاهی میان ذات یک عنصر و مجموعه‌ی صفات آن تمایز قائل نمی‌شویم. مجموعه‌ی ویژگی‌های یک عنصر داده شده را در نظریه‌ی مدل، تایپ خواهیم نامید.

گیریم $T \models \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$، $\bar{a} \in M$ و $\bar{b} \in N$. هدف پاسخ به این سوال است که در چه صورتی تئوریِ T نمی‌تواند میان دنباله‌های (نه لزوماً متناهی) $\bar{a}, \bar{b}$ تمایز بگذارد. خواهیم دید که این خواسته زمانی برآورده می‌شود که این دو دنباله نسبت به تئوری یادشده همتایپ باشند.

بگذارید بحث را با مثالی پی بگیریم. اگر x, y دو عنصر متعالی روی میدانِ $\mathbb{Q}$ باشند، آنگاه $\mathbb{Q}(x) \cong \mathbb{Q}(y)$؛ یعنی این دو عنصر از لحاظ جبری روی $\mathbb{Q}$ ارزش یکسانی دارند. به زبان نظریه‌ی مدلی، این دو عنصر روی $\mathbb{Q}$ همتایپند. در ادامه مطالب بالا را به زبان دقیق نظریه‌ی مدلی درآورده‌ایم.

یادآوری می‌کنیم که منظور از عبارتِ

$$\text{فرمولِ } \phi(x_1, \ldots, x_n) \text{ با تئوری } T \text{ سازگار است} \qquad (*)$$

این است که $T \cup \{\exists x_1, \ldots x_n \quad \phi(x_1, \ldots x_n)\}$ مجموعه‌ای سازگار از جمله‌هاست؛ به بیان دیگر، مدل $\mathfrak{M}$ از T و عناصرِ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in M$ چنان موجودند که $\mathfrak{M} \models \phi(\alpha_1 \ldots, \alpha_n)$. فرض کنید $c_1, \ldots, c_n$ ثوابتی جدید باشند و $L' = L \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$. آنگاه $(*)$ معادل این است که L' ـ تئوریِ $T \cup \{\phi(c_1, \ldots, c_n)\}$ سازگار باشد؛ یعنی L' ـ ساختارِ $\mathfrak{M}' = \langle \mathfrak{M}, c_1, \ldots, c_n \rangle$ موجود باشد به طوری که $\mathfrak{M}' \models T$ و $\mathfrak{M}' \models \phi(c_1, \ldots, c_n)$. توجه کنید که هرگاه که $\mathfrak{M}' = \langle \mathfrak{M}, \ldots \rangle$ بسطی از L ـ ساختارِ $\mathfrak{M}$ به زبانِ $L' = L \cup \{\ldots\}$ باشد، آنگاه برای هر L ـ جمله‌ی ϕ داریم

$$\mathfrak{M}' \models \phi \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \phi.$$

در سرتاسرِ ادامه‌ی این جلسه، فرض کرده‌ایم که T یک تئوری کامل باشد در زبانِ L که هیچ مدل از آن متناهی نیست. برای تعریف بعدی، دو مدلِ $T \models \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ و چندتایی‌های $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in M$ و $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in N$ را در نظر بگیرید.

تعریف ۵۹: دنباله‌های $\bar{a}$ و $\bar{b}$ را **گالواهم‌ارز** می‌خوانیم هرگاه مدلِ $\mathbb{M}$ و نشاندنهای مقدماتیِ $f : \mathfrak{M} \to \mathbb{M}$ و $g : \mathfrak{N} \to \mathbb{M}$ چنان موجود باشند که $f(\bar{a}) = g(\bar{b})$. در این صورت می‌نویسیم $\langle \mathfrak{N}, \bar{b} \rangle \sim_{Gal} \langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle$ یا $\bar{a} \sim_{Gal} \bar{b}$.

توجه کنید که در نماد $\bar{b}$ $\bar{a} \sim_{Gal}$ مدلها به چشم نمی‌آیند. بعدها خواهیم دید که در این نمادگذاری عمدی در کار است؛ مدلها، به پیمانه‌ی نشستنهای مقدماتی دراین تعریف بی‌نقشند.

مثال ۶۰: فرض کنید $\mathfrak{M} \models T$ و $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{M})$. آنگاه برای هر $a_1, \dots a_n \in M$ داریم

$$a_1 \dots a_n \sim_{Gal} f(a_1) \dots f(a_n).$$

توجه ۶۱: اگر $\bar{a} \sim_{Gal} \bar{b}$ آنگاه برای هر L ـ فرمولِ $\phi(\bar{x})$ داریم $\mathfrak{M} \models \phi(\bar{a})$ اگروتنهااگر $\mathfrak{N} \models \phi(\bar{b})$؛ به عبارت دیگر

$$\bar{a} \sim_{Gal} \bar{b} \Rightarrow \langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle \equiv \langle \mathfrak{N}, \bar{b} \rangle.$$

رابطه‌ی $\sim_{Gal}$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. برای اثبات این گفته، به لم زیر نیاز داریم که آن را در جلسات تمرین اثبات خواهیم کرد.

تمرین ۶۲: فرض کنید تئوری T کامل باشد. نشان دهید در آن صورت

۱. T دارای ویژگیِ ادغام (یا ملغمه‌سازی) [۳۶] است؛ بدین معنی که هرگاه $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \models T$ و $f_1 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ و $f_2 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ نشاندنهای مقدماتی باشند، آنگاه مدلِ $\mathfrak{D} \models T$ و نشاندنهای مقدماتیِ $g_1 : \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$ و $g_2 : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ چنان موجودند که $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$.

۲. T دارای ویژگیِ امکان‌نشاندن‌هم‌زمان [۳۷] است؛ یعنی برای هر دو مدلِ $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$ مدلی چون $\mathfrak{C} \models T$ و نشاندنهایی مقدماتی چون $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ و $g : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ موجودند.

گزاره ۶۳: رابطه‌ی $\sim_{Gal}$ هم‌ارزی است.

اثبات. بررسی انعکاسی و تقارنی بودن رابطه‌ی یادشده چندان دشوار نیست؛ در اینجا تنها به اثبات تعدی آن پرداخته‌ایم. گیریم $\bar{a} \sim_{Gal} \bar{b}$ و $\bar{c} \sim_{Gal} \bar{b}$. پس نگاشتهای مقدماتیِ $f_{\mathfrak{M}} : \langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle \to \langle \mathfrak{Q}_1, \bar{q}_1 \rangle$ و $f : \mathfrak{N} : \langle \mathfrak{N}, \bar{b} \rangle \to \langle \mathfrak{Q}_1, \bar{q}_1 \rangle$ چنان موجودند که $f_{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = f_{\mathfrak{N}}(\bar{b}) = \bar{q}_1$. به همین ترتیب نگاشتهای مقدماتی $g_{\mathfrak{N}} : \langle \mathfrak{N}, \bar{b} \rangle \to \langle \mathfrak{Q}_2, \bar{q}_2 \rangle$ و $g_{\mathfrak{P}} : \langle \mathfrak{P}, \bar{p} \rangle \to \langle \mathfrak{Q}_2, \bar{q}_2 \rangle$ چنان موجودند که $g_{\mathfrak{N}}(\bar{b}) = g_{\mathfrak{P}}(\bar{p}) = \bar{q}_2$. هدفمان پیدا کردن مدل

[۳۶] amalgamation property (AP)

[۳۷] joint embedding property

$\langle\mathfrak{Q}_3,\bar{q}_3\rangle$ به همراه نگاشتهای مقدماتیِ $h_{\mathfrak{M}}:\langle\mathfrak{M},\bar{a}\rangle\to\langle\mathfrak{Q}_3,\bar{q}_3\rangle$ و $h_{\mathfrak{P}}:\langle\mathfrak{P},\bar{p}\rangle\to\langle\mathfrak{Q}_3,\bar{q}_3\rangle$ است به طوری که $h_{\mathfrak{M}}(\bar{a})=h_{\mathfrak{p}}(\bar{p})=\bar{q}_3$.

بنا به ویژگی ادغام، می‌توان $L\cup\{c_1,\dots,c_n\}$ ـ ساختارِ $\langle\mathfrak{Q}_3,\bar{q}_3\rangle$ و نشاندنهای $h_{\mathfrak{Q}_1}:\langle\mathfrak{Q}_1,\bar{q}_1\rangle\to\langle\mathfrak{Q}_3,\bar{q}_3\rangle$ و $h_{\mathfrak{Q}_2}:\langle\mathfrak{Q}_2,\bar{q}_2\rangle\to\langle\mathfrak{Q}_3,\bar{q}_3\rangle$ را چنان یافت که $h_{\mathfrak{Q}_1}\circ f_{\mathfrak{N}}=h_{\mathfrak{Q}_2}\circ g_{\mathfrak{N}}$. حال $h_{\mathfrak{Q}_1}\circ f_{\mathfrak{M}}$ و $h_{\mathfrak{Q}_2}\circ g_{\mathfrak{P}}$ نشاندنهای مورد نیاز هستند.

$$\begin{tikzcd}
\langle\mathfrak{M},\bar{a}\rangle \arrow[dr] & & \\
& \langle\mathfrak{Q}_1,\bar{q}_1\rangle \arrow[dr] & \\
\langle\mathfrak{N},\bar{b}\rangle \arrow[ur] \arrow[dr] & & \langle\mathfrak{Q}_3,\bar{q}_3\rangle \\
& \langle\mathfrak{Q}_2,\bar{q}_2\rangle \arrow[ur] & \\
\langle\mathfrak{P},\bar{p}\rangle \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

□

گفتیم که از $\bar{a}\sim_{Gal}\bar{b}$ نتیجه می‌شود که $\langle\mathfrak{M},\bar{a}\rangle\equiv\langle\mathfrak{N},\bar{b}\rangle$. عکس این گفته نیز برقرار است:

گزاره ۶۴: اگر $\langle\mathfrak{M},\bar{a}\rangle\equiv\langle\mathfrak{N},\bar{b}\rangle$ آنگاه $\bar{a}\sim_{Gal}\bar{b}$.

اثبات. فرض کنید $\langle\mathfrak{Q},\bar{q}\rangle$ مدلی باشد از تئوریِ $\mathrm{Th}(\mathfrak{M},\bar{a})=\mathrm{Th}(\mathfrak{N},\bar{b})$. نشاندنهای مورد نیاز به آسانی پیدا می‌شوند. □

تعریف ۶۵: گیریم $T\models\mathfrak{M}$ و $a_1,\dots,a_n\in M$. تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_1,\dots,a_n)=\{\phi(x_1,\dots,x_n)|\mathfrak{M}\models\phi(a_1,\dots,a_n)\}.$$

بنابر آنچه گفته شد

$$\bar{a}\sim_{Gal}\bar{b}\Leftrightarrow\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a})=\mathrm{tp}^{\mathfrak{N}}(\bar{b});$$

به‌ویژه کلاسهای هم‌ارزی رابطه‌ی $\sim_{Gal}$ تشکیل **مجموعه** می‌دهند: قرار دهید

$$S_n(T) = \{\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n) | \mathfrak{M} \models T, a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{M}\},$$

واضح است که $|S_n(T)| \leq 2^{\|L\|}$.

تعریف ۶۶ (تایپ جزئی): مجموعه‌ی $\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ متشکل از L ـ فرمولهایی با متغیرهای در میانِ $x_1 \ldots, x_n$ را یک **تایپِ جزئی** [۳۸] می‌خوانیم هرگاه $T \cup \Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ سازگار باشد؛ یعنی $\mathfrak{M} \models T$ و عناصرِ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in M$ چنان موجود باشند که برای هر $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in \Sigma$ داشته باشیم $\mathfrak{M} \models \phi(\bar{\alpha})$.

یک تایپ جزئی را می‌توان به عنوان دستگاهی از معادلات دانست که محدودیتهای آن شروط تئوری T است. سازگاری، ضامن پاسخدار بودن این مجموعه از معادلات است. بنابراین، $\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ یک تایپ جزئی است اگروتنهااگر مدلِ $T \models \mathfrak{M}$ و عناصرِ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in M$ موجود باشند به طوری که

$$\Sigma(x_1, \ldots, x_n) \subseteq \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

در صورتی که در بالا، تساوی رخ دهد، Σ را یک **تایپ کامل**، [۳۹] یا طور خلاصه یک **تایپ** می‌خوانیم.

نکته ۶۷: متناهی بودن تعداد متغیرها در تعریفهای بالا ضروری نیست. فرض کنید $\langle x_i : i \in I \rangle$ دنباله‌ای از متغیرها باشد. مجموعه‌ی $\Sigma(x_i | i \in I)$ متشکل از فرمولهایی چون $\phi(x_{i1}, \ldots, x_{in})$ را تایپ جزئی می‌خوانیم هرگاه با T سازگار باشد. بدینسان نیز می‌توان مجموعه‌ی $S_I(T)$ را متشکل از تایپهای کامل با این متغیرها تشکیل داد.

تعریف ۶۸ (توپولوژی استون): در یک زبانِ مشخصِ L قرار دهید

$$\mathrm{Th}_L = \{T | \text{ یک تئوری کامل است } T\}$$

داریم $\mathrm{Th}_L \subseteq 2^{2^{\text{جمله‌ها}}}$. برای هر L ـ جمله‌ی ϕ قرار دهید $[\phi] = \{T \in \mathrm{Th}_L | \phi \in T\}$. مجموعه‌های $[\phi]$ تشکیل پایه‌ای برای یک توپولوژی روی Th_L می‌دهند که این توپولوژی، بنا به قضیه‌ی فشردگی،

[۳۸] partial type

[۳۹] complete type

فشرده است. به طور مشابه، می‌توان روی $S_n(T)$ توپولوژی ایجاد شونده توسط عناصر پایه‌ایِ زیر را در نظر گرفت:

$$[\phi(x_1, \ldots, x_n] = \{p | p = \mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n), \phi \in p, \mathfrak{M} \models T, a_1, \ldots, a_n \in M\}.$$

توپولوژی یادشده را **توپولوژی استون** می‌خوانیم. این توپولوژی فشرده، تماماً ناهمبند و هاسدورف است.