۳ جلسه‌ی سوم

کلاسِ $\mathcal{K}$ از L ـ ساختارها را **مقدماتی** [۲۹] می‌خوانیم هرگاه این کلاس، مجموعه‌ی همه‌ی L ـ ساختارهایی باشد که مدل یک تئوری مانند T هستند؛ به بیان دیگر هرگاه یک تئوریِ T موجود باشد، به طوری که $T = MOD(T)$ که در آن $MOD(T) = \{\mathfrak{M} | \mathfrak{M} \models T\}$.

تمرین ۴۵: ثابت کنید که کلاس میدانهای متناهی، مقدماتی نیست.

در زیر چند شرط لازم را برای مقدماتی بودن یک کلاس $\mathcal{K}$ فهرست کرده‌ایم.

۱. اگر $\mathcal{K}$ دارای مدلهای متناهیِ باندازه‌ی‌کافی‌بزرگ باشد، آنگاه $\mathcal{K}$ حاوی مدلهایی نامتناهی باشد.

۲. اگر $\mathcal{K}$ حاوی مدلی نامتناهی باشد، آنگاه $\mathcal{K}$ حاوی مدلهای نامتناهی از هر اندازه‌ی دلخواه باشد.

۳. $\mathcal{K}$ نسبت به هم‌ارزی مقدماتی بسته باشد.

۴. $\mathcal{K}$ تحت فراضربها بسته باشد؛ یعنی هرگاه $\langle \mathfrak{M}_i \rangle_{i \in I}$ دنباله‌ای از عناصرِ $\mathcal{K}$ باشد و $\mathbf{F}$ فرافیلتری روی I، آنگاه $\prod_{\mathbf{F}} \mathfrak{M}_i \in \mathcal{K}$.

مثال ۴۶: مفهوم کامل بودن یک میدان مرتب (یعنی اینکه هر زیرمجموعه از آن دارای سوپرمم و اینفیمم باشد) مفهومی مقدماتی نیست. در آنالیز مقدماتی ثابت می‌شود که هر میدان مرتب کامل با $\langle \mathbb{R}, +, ., \leq \rangle$ ایزومرف است. پس موردِ ۲ در بالا در این تئوری مصداق ندارد.

تئوریِ T را **ارضاپذیر** [۳۰] می‌خوانیم هرگاه مدلی برای آن موجود باشد.

قضیه ۴۷ (فشردگی): تئوریِ T ارضاپذیر است اگروتنهااگر هز زیرمجموعه‌ی متناهی از آن ارضاپذیر باشد.

اثباتِ قضیه‌ی فشردگی، جزو برنامه‌ی این درس نیست و فرض ما بر این است که دانشجو پیشتر اثباتی از آن را در درس نظریه‌ی مدلِ ۱ دیده است. با این حال یادآوری می‌کنیم که قضیه‌ی فشردگی را می‌توان با روشهای مختلفی ثابت کرد. نخستین روش استفاده از قضیه‌ی درستی و تمامیت گودل

[۲۹] elementary class
[۳۰] satisfiable

است؛ یعنی قضیه‌ای که بنا بر آن (برای هر مجموعه‌ی Σ از جمله‌ها)

$$\Sigma \models T \Leftrightarrow \Sigma \vdash T.$$

به ویژه، بنا به قضیه‌ی یاددشده

$$\Sigma \models \perp \Leftrightarrow \Sigma \vdash \perp;$$

به بیان دیگر، Σ سازگار است اگروتنهااگر دارای مدل باشد. از طرفی Σ سازگار است اگروتنهااگر هر بخش متناهی از آن سازگار باشد، اگروتنهااگر هر بخش متناهی از آن دارای مدل باشد. پس Σ دارای مدل است اگروتنهااگر هر بخش متناهی از آن دارای مدل باشد.

روش دیگر برای اثبات فشردگی، بهره‌گیری از ساختمانهای هنکین [۳۱] است. در این روش، تکنیکهای اثبات قضیه‌ی درستی و تمامیت، مستقیماً برای بناکردن یک مدل برای Σ استفاده می‌شوند.

روش سوم، که در تمرینهای درس بدان پرداخته خواهد شد، استفاده از فراضربهاست. در این روش مدل مورد نظر از فراضربی از مدلهای موجود برای هر بخشِ متناهی از Σ حاصل می‌شود.

برای یک زبان داده‌شده‌ی L تعریف کنید $\|L\| := \max\{\aleph_0, |L|\}$؛ به بیان دیگر،

$$\|L\| = \begin{cases} |L| & |L| \geq \aleph_0, \\ \aleph_0 & |L| \end{cases}$$

قضیه ۴۸ (لُونهایم اسکولمِ کاهشی): اگر تئوریِ T ارضاپذیر باشد، مدلی با اندازه‌ی کمتریامساویِ $\|L\|$ دارد.

قضیه ۴۹ (لُونهایم اسکولمِ افزایشی): اگر تئوریِ T ارضاپذیر و دارای مدلی نامتناهی باشد، آنگاه برای هر کاردینالِ نامتناهیِ $\kappa \geq \|L\|$ مدلی از اندازه‌ی κ دارد.

تمرین ۵۰: فرض کنید تئوریِ T دارای مدلی نامتناهی باشد. با استفاده از لمهای لونهایم‌اسکولم و فشردگی، نشان دهید که آنگاه T مدلی با اندازه‌ی دقیقاً برابر با κ دارد.

گفتیم که اگر کلاسی مقدماتی باشد، تحتِ فراضربها بسته است. در زیر شرطی لازم و کافی برای مقدماتی بودن یک کلاس آورده‌ایم.

قضیه ۵۱:

[۳۱] Henkin

۱. کلاسِ $\mathcal{K}$ از L ـ ساختارها مقدماتی است اگروتنهااگر تحت فراضربها و تحت هم‌ارزی مقدماتی بسته باشد.

۲. کلاسِ $\mathcal{K}$ از L ـ ساختارها مقدماتی است اگروتنهااگر تحت فراضربها و تحت ایزومرفیسم بسته باشد.

مورد دوم، قضیه‌ای از شلاه و کیسلر [۳۲] است که اثبات آن را به عنوان پروژه بر عهده‌ی دانشجویان وامی‌نهیم.

اثبات قسمت اول. گیریم $\mathcal{K}$ تحت فراضربها و هم‌ارزی مقدماتی بسته باشد؛ هدفمان یافتن تئوریِ T است به طوری که

$$\mathcal{K} = MOD(T).$$

ادعا می‌کنیم که تئوریِ T در پایین، همانگونه است که می‌خواهیم:

$$T = \bigcap_{i\in I} \mathrm{Th}(M_i) = \{\phi | \forall \mathfrak{M} \in \mathcal{K} \quad \mathfrak{M} \models \phi\}.$$

توجه ۵۲: بنابراین، ثابت خواهیم کرد که هرگاه $\langle \mathfrak{M}_i \rangle_{i\in I}$ خانواده‌ای از L ـ ساختارها باشد، آنگاه تئوری اشتراک آنها هم‌ارز مقدماتی با تئوری فراضربی از آنهاست.

نخست توجه کنید که T بوضوح ارضاپذیر است و $\mathcal{K} \subseteq MOD(T)$.

فرض کنید $\mathfrak{N}$ مدلی از T باشد. نشان خواهیم داد که خانواده‌ی $\langle \mathfrak{M}_i \rangle_{i\in I}$ و فرافیلترِ F روی I چنان موجودند که $\mathfrak{N} \equiv \prod_F \mathfrak{M}_i$. از آنجا که $\mathcal{K}$ تحت هم‌ارزی مقدماتی و فراضربها بسته است، از این نتیجه خواهد شد که $\mathfrak{N} \in \mathcal{K}$.

برای هر گزاره‌ی $\theta \in \mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ مدلی چون $\mathfrak{M}_\theta$ چنان موجود است که $\mathfrak{M}_\theta \models \theta$ (در غیر این صورت $\neg\theta \in \bigcap_{i\in I} \mathrm{Th}(\mathfrak{M}_i) = T$). حال می‌گیریم

$$I = \{\Delta | \Delta \subseteq_{\text{متناهی}} \mathrm{Th}(\mathfrak{N})\}$$

و برای هر $\Delta \in I$ قرار می‌دهیم

$$\Sigma_\Delta = \{\Delta' \in I | \Delta \subseteq \Delta'\}.$$

---
[۳۲] Shelah, Kiesler

مجموعه‌ی $X = \{\Sigma_\Delta | \Delta \in I\}$ ویژگی اشتراک متناهی ناتهی دارد و از این رو در فرافیلتری چون F روی I واقع می‌شود.

تمرین ۵۳: برای به پایان رساندن اثبات، نشان دهید که $\prod_F \mathfrak{M}_i \equiv \mathfrak{N}$.

$\square$

در نظریه‌ی مدل، مدلها را با استفاده از فرمولهای صادق در آنها مطالعه می‌کنیم. در برخی تئوریها همه‌ی فرمولها معادل با نوع خاصی از فرمولهایند.

تعریف ۵۴: تئوریِ T را **دارای حذف سور** [۳۳] می‌خوانیم هرگاه هر فرمولی به پیمانه‌ی آن معادلی بدون سور داشته باشد؛ یعنی برای هر فرمولِ $\phi(x_1, \dots, x_n)$ فرمولی بدون سور چون $\psi(x_1, \dots, x_n)$ موجود باشد، به طوری که

$$T \models \forall x_1, \dots, x_n \quad \phi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \dots, x_n).$$

برای اینکه تعریف بالا جمله‌ها را نیز در برگیرد، نیاز است که زبانِ L حاوی حداقل یک ثابت باشد.

حذف سور را از نظرگاههای زیر، یک «ویژگی جبری» از تئوریها به حساب می‌آورند. نخست این که هر فرمول بدون سور، در یک ساختار جبری ترکیبی بولی از چندگوناها [۳۴] را به دست می‌دهد. برای مثال، در تئوریِ ACF فرمولهای بدون سور، چندگوناهای جبری را، یعنی ترکیبات بولی مجموعه‌های به شکل $\{\bar{x} | f_1(\bar{x}) = f_2(\bar{x}) = \dots = f_n(\bar{x}) = 0\}$ را به دست می‌دهند که در این نمایش f_i ها چندجمله‌ایند. نیز در RCF فرمولهای بدون سور، مجموعه‌های شبه‌جبری [۳۵] را به دست می‌دهند؛ یعنی مجموعه‌هایی که از ترکیبات بولی مجموعه‌هایی به شکل زیر حاصل می‌شود: $\{\bar{x} | f_1(\bar{x}) > 0, \dots, f_n(\bar{x}) > 0\}$. پس حذف سور داشتن در این تئوریها یعنی برابر بودنِ مجموعه‌های تعریف‌پذیر با ترکیبات بولی چندگوناها.

دوم این که اگر $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ دو مدل از یک تئوریِ دارای حذف سورِ T باشند به طوری که $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$، آنگاه $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ (علت: می‌دانیم که اگر $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ آنگاه $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ درباره‌ی فرمولهای بدون سور با پارامتر در M همنظرند. حال بنا به حذف سور، همه‌ی فرمولها را می‌توان بدون سور در نظر گرفت).

[۳۳] quantifier elimination

[۳۴] variety

[۳۵] semialgebraic

حذف سور را از نظرگاههای زیر، یک «ویژگی جبری» از تئوریها به حساب می‌آورند. نخست این که هر فرمول بدون سور، در یک ساختار جبری، ترکیبی بولی از چندگوناها را به دست می‌دهد. برای مثال، در تئوریِ ACF فرمولهای بدون سور، چندگوناها را، یعنی ترکیبات بولی مجموعه‌های به شکل $\{\bar{x}|f_۱(\bar{x} = f_۲(\bar{x}) = \ldots = f_n(\bar{x}) = ۰\}$ را به دست می‌دهند که در نمایش بالا f_i ها چندجمله‌ایند. نیز در RCF فرمولهای بدون سور، مجموعه‌های شبه‌جبری را به دست می‌دهند؛ یعنی مجموعه‌هایی که از ترکیبات بولی مجموعه‌هایی به شکل زیر حاصل می‌شود: $\{\bar{x}|f_۱(\bar{x}) > ۰, \ldots, f_n(\bar{x}) > ۰\}$. پس حذف سور داشتن در این تئوریها یعنی برابر بودن مجموعه‌های تعریف‌پذیر با چندگوناهای جبری.

از طرفی اگر $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ دو مدل از یک تئوریِ دارای حذف سورِ T باشند به طوری که $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$، آنگاه $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ (علت: می‌دانیم که اگر $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ آنگاه $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ درباره‌ی فرمولهای بدون سور با پارامتر در M هم‌منظرند. حال بنا به حذف سور، همه‌ی فرمولها را می‌توان بدون سور دانست).

مثال ۵۵: تئوریهای ACF و RCF سورها را حذف می‌کنند.

در ساختارِ $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, ۰, ۱, \leq \rangle$ فرمولِ $\exists x \quad ax^۲ + bx + c = ۰$ دارای معادل بدون سورِ $b^۲ - ۴ac \geq ۰$ است. این را می‌توان با روشهای مقدماتی جبری ثابت کرد، اما یافتن معادل بدون سور برای همه‌ی فرمولها بدین سادگی نیست. عموماً برای بررسی حذف سور از محکهایی استفاده می‌شود که در تمرینهای درس، به یکی از آنها یعنی وجود سامانه‌های رفت و برگشتی خواهیم پرداخت.

تئوریهای دارای حذف سور را گاهی **زیرساختارْکامل** می‌خوانند:

تمرین ۵۶: موارد زیر با هم معادلند:

۱. تئوریِ T سورها را حذف می‌کند.

۲. $\mathrm{Diag}(\mathfrak{A}) \cup T$ برای برای هر مدلِ $\mathfrak{M} \models T$ و هر زیرساختِ $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}$ یک تئوریِ کامل است.

تئوریِ T را **مدل‌کامل** می‌خوانند هرگاه هر فرمول به پیمانه‌ی آن دارای معادلی وجودی باشد؛ یعنی برای هر فرمولِ $\phi(x_۱, \ldots, x_n)$ فرمولی بدون سور چون $\psi(x_۱, \ldots, x_n, y_۱, \ldots, y_m)$ موجود باشد، به طوری که

$$T \models \forall x_۱, \ldots, x_n \quad \phi(x_۱, \ldots, x_n) \leftrightarrow \exists y_۱, \ldots y_m \quad \psi(x_۱, \ldots, x_n, y_۱, \ldots, y_m).$$

(واضح است که) حذف سور، مدل‌کامل بودن را نتیجه می‌دهد؛ ولی عکس این برقرار نیست.

تمرین ۵۷: نشان دهید که RCF در زبان $L = \{+, -, \cdot, ۰, ۱\}$ مدل‌کامل است ولی سورها را حذف نمی‌کند.

وجه تسمیهِ «مدل‌کامل» در تمرین زیر مشخص می‌شود.

تمرین ۵۸: نشان دهید که موارد زیر با هم معادلند:

۱. تئوریِ T مدل‌کامل است.

۲. برای هر مدلِ $\mathfrak{M} \models T$ تئوریِ $T \cup \mathrm{Diag}(\mathfrak{M})$ کامل است.

۳. برای هر دو مدلِ $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models T$ داریم

$$\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \Leftrightarrow \mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}.$$