۱۴.۲ جلسه‌ی بیست و ششم

سرانجام همه‌ی مقدمات برای اثبات قضیه‌ی زیر از مُرلی فراهم آمد. در این جلسه این قضیه را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۲۳۴ (قضیه‌ی مُرلی): فرض کنیم که T یک تئوریِ کاملِ شمارای به‌طورناشمارا جازم باشد. آنگاه T در هر کاردینالِ $\kappa \geq \aleph_1$، جازم است.

قضیه‌ی بالا از لم زیر به آسانی نتیجه می‌شود:

لم ۲۳۵: فرض کنیم که T یک تئوریِ ωپایدار باشد و κ کاردینالی ناشمارا. فرض کنیم که تمام مدلهای دارای اندازه‌ی κ از T اشباع باشند. آنگاه برای هر کاردینال ناشمارای λ همه‌ی مدلهای دارای اندازه‌ی λ از T اشباعند.

اثبات قضیه‌ی مُرلی به عنوان نتیجه‌ی لم بالا. قبلاً ثابت کرده‌ایم که اگر T در یک کاردینالِ ناشمارا، جازم باشد، آنگاه تنها مدلِ (همه‌ی مدلهای) آن با اندازه‌ی κ اشباعند. برای هر کاردینال ناشمارای دلخواهِ λ نیز بنا به لمِ بالا، تمام مدلهای T از اندازه‌ی λ، اشباعند. از این رو (با کمک سامانه‌های رفت‌وبرگشتی) همه‌ی مدلهای با اندازه‌ی λ از T با هم ایزومرفند؛ یعنی تئوری یادشده، λجازم است. □

اثباتِ لم. فرض کنید که T مدلی چون $\mathfrak{M}$ داشته باشد دارای اندازه‌ی λ، که اشباع نباشد. بنابراین $A \subseteq M$ با $|A| < \lambda$ و $p(x) \in S_1(A)$ چنان موجودند که p در M برآورده نمی‌شود. قبلاً ثابت کرده‌ایم که دنباله‌ی بازنشناختنی چون $I = (a_i)_{i\in\omega}$ روی A در M موجود است.

از آنجا که p در M برآورده نمی‌شود، به ویژه $p(x)$ روی $A \cup I$ ایزوله نیست (اگر ایزوله بود، برآورده می‌شد). بنابراین هیچ فرمولی چون $\phi(x) \in L_{A\cup I}$ سازگار با $\mathfrak{M}$ موجود نیست، به طوری که برای هر $\theta(x) \in p$ داشته باشیم $\mathfrak{M} \models \phi(x) \to \theta(x)$. پس برای هر فرمولِ $\phi(x) \in L_{A\cup I}$ که با $\mathfrak{M}$ سازگار باشد، فرمولی چون $\theta(x) \in p$ چنان موجود است که $\mathfrak{M} \models \exists x \quad (\phi(x) \wedge \neg\theta(x))$.

ادعای ۲۳۶: بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که مجموعه‌ی A شماراست.

برای توجیه ادعای بالا، فرض کنیم که $A_0 \subseteq A$ شمارا باشد. در این صورت، مجموعه‌ی شمارای $A_1 \supseteq A_0$ چنان موجود است که برای هر فرمولِ $\phi(x) \in L_{A_0\cup I}$ که با $\mathfrak{M}$ سازگار باشد، فرمولِ $\theta(x) \in p(x)$ یافت شود که $\theta(x) \in L_{A_1}$ و $\mathfrak{M} \models \exists x \quad (\phi(x) \wedge \neg\theta(x))$. بدین ترتیب

می‌توان مجموعه‌های $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots$ را چنان یافت که برای هر فرمولِ $\phi \in L_{A_n \cup I}$ فرمولی چون $\theta \in L_{A_{n+1}}$ یافت شود به طوری که $\mathfrak{M} \models \exists x \quad (\phi(x) \wedge \neg\theta(x))$. می‌توانیم قرار دهیم $A' = \bigcup_n A_n$ و تایپِ $p' = p|_{A'}$ را در نظر بگیریم. در این صورت برای هر فرمول θ متعلق به این تایپ، فرمولی در $L_{A' \cup I}$ مانند ϕ موجود است به طوری که $\mathfrak{M} \models \exists x \quad (\phi(x) \wedge \neg\theta(x))$.

بنا به فشردگی، مدلی چون $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$ و در آن دنباله‌ی بازنشناختنی روی A مانند $I' = (b_i)_{i\in\kappa}$ چنان موجودند که برای هر $i_1 < \ldots < i_n$ داریم $b_{i_1} \ldots b_{i_n} \equiv_A a_1 \ldots a_n$. از سوئی، بنا به قضایای گذشته، $\mathfrak{N}$ دارای زیرمدلی مقدماتی چون $\mathfrak{M}'$ است که روی $A \cup I'$ ساخته‌شدنی است.

طبق فرض قضیه، $\mathfrak{M}'$ مدلی اشباع است (چون اندازه‌اش κ است)؛ پس تایپِ p در آن توسط عنصری چون c برآورده می‌شود. از آن جا که $\mathfrak{M}'$ روی $A \cup I'$ ساخته‌شدنی است، $\mathrm{tp}(c/A \cup I')$ ایزوله است؛ فرض کنیم فرمولِ $\psi(x, b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}, \bar{a}) \in \mathrm{tp}(c/A \cup I')$ آن را ایزوله کند. پس برای هر فرمولِ $\theta(x) \in p(x)$ داریم

$$\mathfrak{N} \models \psi(x, b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}, \bar{a}) \rightarrow \theta(x).$$

پس

$$\forall x(\psi(x) \rightarrow \theta(x)) \in \mathrm{tp}(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}/A) = \mathrm{tp}(a_1, \ldots, a_n/A).$$

پس برای هر $\theta(x) \in p(x)$ داریم $\mathfrak{M} \models \psi(x, a_1, \ldots, a_n, \bar{a}) \rightarrow \theta(x)$؛ تناقض. □

خلاصه‌ی اثبات. فرض کنیم همه‌ی مدلهای از اندازه‌ی κ اشباع باشند ولی مدلی داشته باشیم از اندازه‌ی λ که اشباع نباشد. در این مدل یک دنباله‌ی بازنشناختنیِ I موجود است. اگر p تایپی باشد که در M برآورده نشود، روی AI ایزوله نیست.

از طرفی در یک توسیع مقدماتی از $\mathfrak{M}$ دنباله‌ای مانند I' همتایپ با I داریم که اندازه‌اش κ است. روی این دنباله و A مدلی ساخته‌شدنی در نظر می‌گیریم. تایپِ p در این مدل توسط فرمولی در $L_{A\cup I'}$ ایزوله می‌شود؛ بنابراین،از آنجا که دنباله‌ی I' با دنباله‌ی I روی A همتایپ است، این تایپ توسط فرمولی در $L_{A\cup I}$ نیز ایزوله می‌شود؛ تناقض با انتهای بند قبل.