۱۱.۲ جلسه‌ی بیست و پنجم

قضیه ۲۱۸: فرض کنید $\mathfrak{N}$ مدلی دلخواه از T باشد و $A \subseteq N$ زیرمجموعه‌ای داده شده از آن. آنگاه $\mathfrak{N}$ دارای یک زیرمدل مقدماتیِ $\mathfrak{M}$ شاملِ A است که روی A ساخته‌شدنی است.

پیش از اثبات قضیه، لمی ساده را به عنوان تمرین آورده‌ایم:

تمرین ۲۱۹: فرض کنید $T \models \mathfrak{M}$ و A زیرمجموعه‌ای از M باشد. آنگاه $\mathfrak{M}$ روی A ساخته‌شدنی است اگروتنهااگر روی $\langle A \rangle$ ساخته‌شدنی باشد. منظور از $\langle A \rangle$ زیرساختاری از $\mathfrak{M}$ است که توسط A تولید شده است.

اثبات قضیه. اگر A خودْ جهانِ یک زیرساختِمقدماتی باشد، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. در غیر این صورت، بنا به محکِ تارسکی (برای تشخیص مقدماتی بودن زیرساختها) فرمولی چون $\phi(x)$ با پارامتر در A موجود است به طوری که

$$\mathfrak{N} \models \exists x \quad \phi(x) \quad \text{و} \qquad \forall a \in A \quad \mathfrak{N} \models \neg\phi(a). \quad (*)$$

فرض کنید فرمولِ ϕ در بالا چنان باشد که $(\mathrm{RM}\,\phi, \deg\phi) = (\alpha, d)$ در میان مقادیرِ $(\mathrm{RM}, \deg)$ در فرمولهایی که در $(*)$ صدق می‌کنند، با ترتیب قاموسی، مینی‌موم باشد.

ادعای ۲۲۰: فرمولِ ϕ کامل است؛ یعنی در تئوریِ $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}, a)_{a\in A}$، یک تایپِ کامل ایزوله می‌کند.

توجه کنید که کامل بودنِ فرمولِ ϕ معادل این است که هر فرمولِ سازگار با ϕ از ϕ نتیجه شود. به بیان دیگر برای هر فرمولِ $\psi(x)$ اگر داشته باشیم $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}, a)_{a\in A} \models \exists x \quad \phi(x) \wedge \psi(x)$ آنگاه $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}, a)_{a\in A} \models \forall x \quad (\phi(x) \to \psi(x))$.

اگر فرمولِ ϕ کامل نباشد، آنگاه فرمولِ $\psi(x)$ با پارامتر در A چنان موجود است به طوری که $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}, a)_{a\in A} \models \exists x \quad (\phi(x) \wedge \neg\psi(x))$ و $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}, a)_{a\in A} \models \exists x \quad (\phi(x) \wedge \psi(x))$. پس $\mathrm{RM}(\phi \wedge \psi) = \mathrm{RM}(\phi \wedge \neg\psi) = \alpha$ و $\deg(\phi \wedge \psi) = \deg(\phi \wedge \neg\psi) = d$؛ اما از آنجا که $\phi \wedge \psi$ و $\phi \wedge \neg\psi$ هر دو در $(*)$ صادقند، این ناقضِ $\deg\phi = d$ است.

حال که بنا به ادعا، فرمولِ $\phi(x)$ روی A کامل است، فرض کنید $b_0 \in M$ چنان باشد که $\mathfrak{N} \models \phi(b_0)$. آنگاه $\mathrm{tp}(b_0/A)$ ایزوله است. حال زیرساخت تولید شده توسط A و b_0 را در نظر می‌گیریم. اگر این زیرساخت، مقدماتی نباشد، به طور مشابه می‌توان $b_1 \in M$ را چنان یافت که

$\mathrm{tp}(b_1/Ab_0)$ ایزوله باشد. از آنجا که $\mathfrak{N}$ به طور واضح، زیرساختی مقدماتی از خودْ است، این روند سرانجام (با به دست دادن زیرساختی مقدماتی و شاملِ A پایان می‌پذیرد). $\square$

توجه ۲۲۱: گفتیم که اگر $\mathfrak{M}$ روی A ساخته‌شدنی باشد، آنگاه مدلی اول است از تئوریِ $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, a)_{a\in A}$. بنابراین اندازه‌ی آن حداکثر برابر است با $|A| + \|L\|$.

قبلاً (در کلاس درس و تمرین) ثابت کرده‌ایم که در یک مدلِ κاشباع می‌توان دنباله‌ای بازنشناختنی با اندازه‌ی κ پیدا کرد. بازنشناختنی بودنْ از رمزی می‌آمد و قرار گرفتن دنباله در مدل، از اشباع بودن نتیجه می‌شد. در زیر نشان داده‌ایم که برای تئوریِ مفروض ما (که شمارا، کامل و کاملاً متعالی است)، در هر مدل ناشمارا می‌توان دنباله‌ای بازنشناختنی یافت.

نمادگذاری ۲۲۲: برای تایپِ کاملِ p منظورمان از $(\mathrm{RM}, \deg)(p) = (\alpha, d)$ این است که $\mathrm{RM}(p) = \alpha$ و در میان فرمولهای $\phi \in p$ که $\mathrm{RM}(\phi) = \alpha$ کمینه‌ی درجه‌ی مرلی برابر است با d.

قضیه ۲۲۳: گیریم $\mathfrak{M}$ مدلی ناشمارا باشد از T و A زیرمجموعه‌ای نامتناهی از M باشد به طوری که $|A| < |M|$. آنگاه M حاوی یک دنباله‌ی بازنشناختنیِ $(a_i)_{i\in\omega}$ روی A است.

اثبات. گیریم $\kappa = |M|$ و $|A| = \lambda < \kappa$. واضح است که فرمولِ $x = x$ در M دارای بیش از λ جواب است. پس مجموعه‌ی A متشکل از فرمولهای دارای بیش از λ جواب، ناتهی است. فرمولِ $\phi(x, \bar{b}) \in L_M$ را چنان در نظر بگیرید که در میان فرمولهای موجود در A، دارای کمینه‌مقدارِ قاموسیِ $(\mathrm{RM}, \deg) = (\alpha, d)$ باشد. با افزودن پارامترهای $\bar{b}$ به A فرض می‌کنیم که $\phi(x, \bar{b}) \in L_A$.

ادعای ۲۲۴: عنصری چون $a_0 \in M$ چنان موجود است که $\models \phi(a_0, \bar{b})$ و $(\mathrm{RM}, \deg)\,\mathrm{tp}(a_0/A) = (\alpha, d)$. به بیان دیگر، فرمولِ ϕ را می‌توان به تایپی کامل روی A گستراند که همان درجه و مرتبه‌ی ϕ را داشته باشد. باز به بیان بهتر، فرمولِ $\psi(x)$ در تایپِ a_0 قرار می‌گیرد اگروتنهااگر $(\mathrm{RM}, deg)\psi \wedge \phi = (\alpha, d)$.

فرض کنیم که غیرِ این صورت باشد، یعنی برای هر $a \in M$ که $\models \phi(a, \bar{b})$ داشته باشیم $(\mathrm{RM}, \deg)(\mathrm{tp}(a/A)) < (\alpha, d)$. (توجه کنید که از آنجا که $\phi \in \mathrm{tp}(a/A)$، بزرگتری نمی‌تواند رخ دهد). پس برای هر $a \in \phi(M, \bar{b})$ فرمولِ $\psi_a(x) \in \mathrm{tp}(a/A)$ چنان موجود است

که $(\mathrm{RM},\deg)\psi_a < (\alpha, d)$. بی کاسته شدن از کلیت فرض می‌کنیم که $\psi_a \subseteq \phi$ (اگر این طور نبود فرمولهای $\psi'_a = \psi_a \wedge \phi$ را در نظر می‌گیریم).

توجه کنید که تعدادِ ψ_a ها حداکثر برابر با $|A| = |A| + \aleph_0$ است. پس از آن جا که همه‌ی آنها زیرمجموعه‌ی ϕ هستند، پس حداقل یکی از آنها دارای اندازه‌ی بیش از λ است. به بیان دیگر، فرمولِ ψ را چنان یافته‌ایم که دارای بیش از λ جواب است و $(\mathrm{RM},\deg\psi) < (\alpha, d)$، که این ناقضِ نحوه‌ی انتخابِ ϕ است.

پس فرض کنید که $a_0 \in M$ به گونه‌ای باشد که $(\mathrm{RM},\deg)(\mathrm{tp}(a_0/A)) = (\alpha, d)$.

حال با همان استدلال بالا، $M \ni a_1$ را چنان می‌یابیم که $(\mathrm{RM},\deg)(\mathrm{tp}(a_1/Aa_0)) = (\alpha, d)$. بدینسان دنباله‌ی $(a_i)_{i\in\omega}$ حاصل می‌شود که در آن $(\mathrm{RM},\deg)(\mathrm{tp}(a_{n+1}/Aa_0\dots a_n)) = (\alpha, d)$.

ادعا می‌کنیم که دنباله‌ی (a_i) در بالا، بازنشناختنی است. برای اثبات ادعا، نشان خواهیم داد که برای هر $i_0 < \dots < i_n$ داریم $a_0 \dots a_n \equiv a_{i_0} \dots a_{i_n}$. نخست حکم را برای $n = 0$ ثابت می‌کنیم؛ یعنی نشان می‌دهیم که برای هر i داریم $a_i \equiv a_0$. توجه کنید که $a_i, a_0 \in \phi(M)$. اگر فرمولی چون ψ موجود باشد به طوری که $\psi \in \mathrm{tp}(a_i/A)$ و $\neg\psi \in \mathrm{tp}(a_0/A)$ آنگاه $(\mathrm{RM}, deg)\phi \wedge \neg\psi = (\alpha, d)$. از طرفی از آنجا که $\psi \in \mathrm{tp}(a_i/a_0 \dots a_{i-1})$ بنا به روش ساخت دنباله داریم $(\mathrm{RM}, deg)\phi \wedge \psi = (\alpha, d)$. این دو ناقضِ $(\mathrm{RM},\deg)\phi = (\alpha, d)$ هستند.

حال فرض می‌کنیم که داشته باشیم $a_0 \dots a_n \equiv a_{i_0} \dots a_{i_n}$. می‌خواهیم از آن نتیجه بگیریم که $a_0 \dots a_n a_{n+1} \equiv a_{i_0} \dots a_{i_n} a_{i_{n+1}}$. داریم

$$\psi(x, a_0, \dots, a_n) \in \mathrm{tp}(a_{n+1}/Aa_0 \dots a_n) \Leftrightarrow (\mathrm{RM},\deg)(\psi(x, a_0, \dots, a_n) \wedge \phi) = (\alpha, d).$$

$$\psi(x, a_{i_0}, \dots, a_{i_n}) \in \mathrm{tp}(a_{i_{n+1}}/Aa_{i_0} \dots a_{i_n}) \Leftrightarrow (\mathrm{RM},\deg)(\psi(x, a_{i_0}, \dots, a_{i_n}) \wedge \phi) = (\alpha, d).$$

از طرفی از $a_0 \dots a_n \equiv a_{i_0} \dots a_{i_n}$ نتیجه می‌شود که

$$(\mathrm{RM},\deg)(\psi(x, a_0, \dots, a_n) \wedge \phi) = (\mathrm{RM},\deg)(\psi(x, a_{i_0}, \dots, a_{i_n}) \wedge \phi) = (\alpha, d)$$

و این حکم را نتیجه می‌دهد. $\square$

توجه ۲۲۵: در اثبات بالا بی آنکه به نامشان اشاره کنیم، از دنباله‌های مُرلی استفاده کردیم. منظورْ دنباله‌ای بازنشناختنی چون $(a_i)_{i\in\omega}$ است که در آن $a_n \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A a_0, \ldots, a_{n-1}$. در این نمادگذاری، $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}$ می‌تواند هر درکی از استقلال باشد. عموماً این استقلالْ از آزاد بودن توسیع تایپها در تعبیری مناسب حاصل می‌شود؛ یعنی عموماً می‌نویسیم $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A b$ هرگاه $\mathrm{tp}(a/Ab)$ توسیعی «آزاد» باشد از $\mathrm{tp}(a/A)$.

در اثبات بالا از تعبیر عدمِ تغییر مرتبه و درجه‌ی مرلی در گسترشها استفاده کردیم: گفته‌ایم $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A b$ هرگاه $(\mathrm{RM}, \deg)\,\mathrm{tp}(a/A) = (\mathrm{RM}, \deg)(\mathrm{tp}(a/Ab)$. در این تعبیر، دنباله‌ای که در اثبات ساختیم، مُرلی بود. تعاریف دقیقتر در زیر آمده‌اند.

فرمولِ $\phi(x, b)$ را گوییم که روی مجموعه‌ی A بخش می‌شود هرگاه دنباله‌ای A بازنشناختنی چون $(b_i)_{i\in\omega}$ یافت شود که $b = b_0$ و $\{\phi(x, b_i)\}_{i\in\omega}$ ناسازگار باشد. می‌گوییم فرمول یادشده روی A منشعب می‌شود هرگاه فصلی از فرمولهای بخش شونده را نتیجه دهد. یک تایپ کامل، بنا به تعریف روی یک مجموعه منشعب می‌شود، هرگاه فرمولی از آن روی آن مجموعه منشعب شود.

تمرین ۲۲۶: تعریف کنید $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A a$ هرگاه $\mathrm{tp}(a/Ab)$ توسیعی غیرانشعابی باشد از $\mathrm{tp}(a/A)$؛ به بیان دیگر هرگاه $\mathrm{tp}(a/Ab)$ روی A منشعب نشود. نشان دهید که (در یک تئوری کاملاًمتعالی) داریم $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A a$ اگروتنهااگر $\mathrm{RM}(\mathrm{tp}(a/Aa) = \mathrm{RM}(\mathrm{tp}(a/A))$.

تمرین ۲۲۷: دنباله‌ی $(a_i)_{i\in\omega}$ را مُرلی بخوانید هرگاه بازنشناختنی باشد و بعلاوه برای هر $n \in \omega$ داشته باشیم $a_n \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid} a_{<n}$. نشان دهید که دنباله‌های مُرلی دقیقاً آنهایینـد که با روش زیر ساخته می‌شوند: یک تایپ جهانیِ $p = \mathrm{tp}(a/\mathbb{M})$ پیدا می‌کنیم که $\mathbb{M} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_\emptyset a$. هر دنباله‌ی $(a_i)_{i\in\omega}$ که در آن $a_n \models p|_{a_{<n}}$، یک دنباله‌ی مُرلی است.

تمرین ۲۲۸: نشان دهید دنباله‌ای که در اثبات قضیه‌ی بالا ساخته شد، مُرلی است. (تنها نشان دهید که دنباله‌ی یادشده بازنشناختنی است).

تمرین ۲۲۹: مربوط به کلاس آموختال: بحث درباره‌ی دنباله‌های مُرلی در تئوریهای بسیارکمینال.