۱۱.۲ جلسه‌ی بیست و چهارم

پیشتر درباره‌ی مدلهای اولیه، به عنوان مدلهایی که به صورت مقدماتی در بقیه‌ی مدلها می‌نشینند، صحبت کرده‌ایم. نیز مدلهای اتمیک را معرفی کردیم که در آنها تایپها ایزوله‌اند. نشان دادیم که در یک زبان شمارا، مدل اولیه، به پیمانه‌ی ایزومرفیسم یکتاست و علتش این است که در زبان شمارا، مدلهای اولیه، اتمیکند. یعنی از آنجا که تایپها ایزوله‌اند، به آسانی می‌توان میان دو مدل اولیه، یک سامانه‌ی رفت‌وبرگشتی برقرار کرد. با این حال، همان گونه که اشاره شد، در آنجا زبان را شمارا فرض کرده بودیم. برای ادامه‌ی بحث نیاز به بسط تئوری مشابهی با زدودن فرضِ شمارا بودن زبان هستیم. نخست آنچه را که گفته شد در قالب یادآوری زیر می‌آوریم:

یادآوری ۲۱۸: مدلِ $\mathfrak{M} \models T$ را اول می‌خوانیم هرگاه برای هر $\mathfrak{N} \models T$ نشاندنی مقدماتی مانند $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ موجود باشد. بنا به کاربردی از لون‌هایم‌اسکولم، همواره داریم $|M| \leq \|T\| := |T| + |L|$. مدلِ $\mathfrak{M}$ را اتمیک می‌خوانیم هرگاه $\mathrm{tp}(c_1, \ldots, c_n)$ برای هر $c_1, \ldots, c_n \in M$ ایزوله باشد. اگر زبان مورد نظر شمارا باشد، آنگاه هر مدل اول اتمیک است؛ زیرا، هر تایپِ غیرایزوله، بنا به قضیه‌ی حذف تایپ (که آن هم در زبانهای شمارا برقرار است) در توسیعی مقدماتی حذف می‌شود، پس در مدل اول نیز باید حذف شود.

سوال ۲۱۹: اگر $\mathfrak{M}$ مدلی اتمیک باشد و $|M| \leq \|T\|$ آیا آنگاه $\mathfrak{M}$ مدلی اول است؟ برای پاسخ به این سوال، دو حالتِ زبان شمارا و ناشمارا را در نظر بگیرید. توجه کنید که در حالتی که زبان شماراست، پاسخ سوال مثبت است و می‌توان توسط یک سامانه‌ی رفت (بدون نیاز به برگشت)، به حکم رسید.

در ادامه، پرسش بالا یکی از محورهای بحث است.

۱۲.۲ مدلهای ساخته‌شدنی

فرض می‌کنیم که T یک تئوریِ ωپایدار باشد.

تعریف ۲۲۰: گیریم $\mathfrak{M} \models T$ و $A \subseteq M$. گوییم مدلِ M روی مجموعه‌ی A ساخته‌شدنی [۱۸] است هرگاه دنباله‌ای چون $(b_\alpha)_{\alpha<\gamma}$ چنان موجود باشد که

[۱۸] constructible

۱. $M = A \cup \{b_\alpha | \alpha < \gamma\}$.

۲. به ازای هر $\gamma < \alpha$ تایپِ b_α روی $Ab_{<\alpha}$ ایزوله باشد، که منظور از $b_{<\alpha}$ مجموعه‌ی $\{b_i | i < \alpha\}$ است.

تمرین ۲۲۱: اگر $\mathfrak{M}$ روی A ساخته‌شدنی باشد، نشان دهید که آنگاه

۱. $\mathfrak{M}$ مدلی اول برای تئوریِ $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, a)_{a \in A}$ است.

۲. $\mathfrak{M}$ مدلی اتمیک برای تئوریِ $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, a)_{a \in A}$ است (از لم زیر استفاده کنید).

برای حل قسمت دوم تمرین بالا، به لم زیر نیاز خواهید داشت:

لم ۲۲۲: اگر $\mathrm{tp}(a/A)$ و $\mathrm{tp}(b/Aa)$ هر دو ایزوله باشند، آنگاه $\mathrm{tp}(ab/A)$ نیز ایزوله است.

اثبات. فرض کنید $\mathrm{tp}(a/A)$ توسط $\phi(x)$ و $\mathrm{tp}(b/Aa)$ توسط $\psi(y, a)$ ایزوله شده باشند. ادعا می‌کنیم که در این صورت $\mathrm{tp}(ab/A)$ توسط فرمولِ $\phi(x) \wedge \psi(y, x)$ ایزوله می‌شود.

کافی است نشان دهیم که فرمول یادشده تایپْ ایزوله می‌کند. برای این منظور باید نشان دهیم که برای هر فرمولِ داده شده‌ی $\xi(x, y)$ فقط یکی از موارد زیر می‌تواند رخ دهد:

$$T \models \exists x, y \quad \xi(x, y) \wedge \phi(x) \wedge \psi(y, x).$$

$$T \models \exists x, y \neg\xi(x, y) \wedge \phi(x) \wedge \psi(y, x).$$

به برهان خلف فرض کنیم هر دوی آنها رخ داده باشند. در آن صورت فرمولِ $\phi(x)$ هم با $\exists y (\xi(x, y) \wedge \psi(y, x))$ سازگار است و هم با $\exists y (\neg\xi(x, y) \wedge \psi(y, x))$. از آنجا که فرمولِ $\phi(x)$ تایپْ‌ایزوله می‌کند داریم

$$T \models \phi(x) \rightarrow \exists y \quad (\xi(x, y) \wedge \psi(y, x))$$

$$T \models \phi(x) \rightarrow \exists y \quad (\neg\xi(x, y) \wedge \psi(y, x)).$$

عبارات بالا برای $x = a$ هم برقرارند؛ یعنی

$$T \models \phi(a) \rightarrow \exists y \quad (\xi(a, y) \wedge \psi(y, a))$$

$$T \models \phi(a) \rightarrow \exists y \quad (\neg\xi(a, y) \wedge \psi(y, a)).$$

عبارات سمت راست بالا، ناقضِ اینند که $\psi(y, a)$ تایپْ ایزوله می‌کند. $\square$

تمرین ۲۲۳: در تئوریِ ACF، نشان دهید که $\mathbb{Q}^{alg}$، یعنی بستارِ جبری اعداد گویا، روی $\mathbb{Q}$ ساخته‌شدنی است.

تمرین ۲۲۴: مدلهای ساخته‌شدنی را در تئوریهای روابط هم‌ارزی تحلیل کنید.

در جلسه‌ی بعد قضیه‌ی زیر را ثابت خواهیم کرد. تئوریِ مورد نظر همچنان ωپایدار و شمارا است.

قضیه ۲۲۵: فرض کنید $\mathfrak{N} \models T$ و $A \subseteq N$. آنگاه مدلی مانند $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ ساخته‌شدنی روی A موجود است.