۱۰.۲ جلسه‌ی بیست و سوم

قضیه ۲۱۴: اگر T یک تئوریِ ω پایدار باشد، آنگاه برای هر $\kappa \geq \omega$ نیز κ پایدار است.

اثبات. فرض کنید $T \models \mathfrak{M}$ و $|M| = \kappa$. می‌خواهیم نشان دهیم که $|S_1(M)| \leq \kappa$.

تایپِ $p(x) \in S_1(M)$ را در نظر بگیرید. بنا بر آنچه در جلسات قبل ثابت کرده‌ایم، هر تئوریِ ω پایدار، کاملاً متعالی است. پس $\alpha \in Ord$ موجود است به طوری که $\mathrm{RM}(p) = \alpha < \infty$. بنابراین فرمولی در p چنان موجود است که که مرتبه‌ی مُرلی آن برابر با α است. از میان فرمولهای این‌چنین، فرمولِ ϕ را با کمینه‌ی درجه‌ی مُرلی انتخاب می‌کنیم. پس $\mathrm{RM}(\phi) = \alpha$ و برای هر $\psi \in p$ اگر $\mathrm{RM}(\psi) = \alpha$ آنگاه $\deg \psi \geq \deg \phi$.

توجه کنید که برای هر $\psi \in p$

$$\alpha \leq \mathrm{RM}(\phi \wedge \psi) \leq \alpha$$

و

$$d \leq \deg(\phi \wedge \psi) \leq d$$

پس $\mathrm{RM}(\phi \wedge \psi) = \alpha$ و $\deg(\phi \wedge \psi) = d$. بنابراین

$$\mathrm{RM}(\phi \wedge \neg\psi) < \alpha$$

زیرا اگر می‌داشتیم $\mathrm{RM}(\phi \wedge \neg\psi) = \alpha$ آنگاه از آنجا که $\phi \wedge \psi, \phi \wedge \neg\psi$ افزاری برای ϕ است، درجه‌ی مُرلیِ ϕ باید بیشتر از d می‌بود.

همچنین توجه کنید که مجموعه‌ای متناهی مانند $A \subseteq M$ موجود است، به طوری که $\mathrm{RM}(p) = \mathrm{RM}(p|_A)$ و $\deg(p) = \deg(p|_A)$. (منظور از $p|_A$ مجموعه‌ی همه‌ی فرمولهایی از p است که پارامترهای آنها در مجموعه‌ی A قرار دارند.) برای اثبات این گفته کافی است A را مجموعه‌ی پارامترهایی بگیریم که در فرمولِ ϕ (همان فرمولِ دارای مینیمومِ مرتبه و درجه در تایپ) ظاهر شده‌اند.

ادعا می‌کنیم که برای دانستن تعداد تایپهای روی M کافی است تعداد تایپهای روی زیرمجموعه‌های متناهی از M و مرتبه و درجه‌ی مُرلی آنها را بدانیم. در واقع اگر $p, q \in S_1(M)$ و $A \subseteq M$ و $p|_A = q|_A$ و $\mathrm{RM}(p|_A) = \mathrm{RM}(p) = \mathrm{RM}(q)$ و

$\deg(p|_A)=\deg(q|_A)=\deg(q)$ آنگاه $p=q$. اگر خواسته‌های ادعا برقرار باشند و $p\neq q$ آنگاه فرمولی چون ψ_1 موجود است به طوری که $\psi_1 \in p$ و $\neg\psi_1 \in q$. فرض کنید ϕ فرمولِ با کمینه‌ی مرتبه و درجه‌ی مرلی در $p|_A = q|_A$ باشد. از آنجا که $\phi\wedge\psi_1 \in p$ داریم $\mathrm{RM}(\phi\wedge\psi_1)=\alpha$. مشابهاً از $\phi\wedge\neg\psi \in q$ نتیجه می‌گیریم که $\mathrm{RM}(\phi\wedge\psi)=\alpha$. به دلیل مشابه $\deg(\phi\wedge\psi_1)=\deg(\phi\wedge\neg\psi_1)=d$ و این ناقضِ $\deg\phi=d$ است.

تعداد زیرمجموعه‌های متناهیِ M حداکثر برابر با κ است. تعداد مرتبه‌های مُرلیِ‌ممکن نیز κ است (زیرا مرتبه‌ی مُرلی به صورت پیوسته باید هر مقداری را اتخاذ کند؛ وقتی تعداد مجموعه‌های مورد نظر حداکثر κ است، حداکثر κ مقدار متفاوت می‌توان برای مرتبه‌ی مُرلی تصور کرد). نیز تعداد حالات ممکن برای درجه‌ی مرُلی شماراست. پس (بنا بر ادعای بالا) حداکثر تعداد تایپهای ممکن، κ است. $\square$

در خلال اثبات بالا به نکته‌ی زیر اشاره کردیم.

مشاهده ۲۱۵: گیریم T یک تئوریِ کاملاً متعالی باشد، $\mathfrak{M}\models T$ و $p\in S_n(M)$ تایپی باشد کامل. فرض کنیم فرمولِ $\phi\in p$ به گونه‌ای باشد که زوجِ $(\mathrm{RM}(\phi),\deg\phi)$، با ترتیب قاموسی، کوچکترین عنصر در مجموعه‌ی زیر باشد:

$$\{(\mathrm{RM}(\psi),\deg\psi)|\psi\in p\}.$$

آنگاه با استفاده از معادله‌ی زیر می‌توان واقع شدن یا نشدن یک فرمول دلخواه را در p تحقیق کرد:

$$\psi\in p\Leftrightarrow \mathrm{RM}(\phi\wedge\neg\psi)<\alpha.$$

قضیه ۲۱۶: فرض کنید که T یک تئوریِ ω پایدار باشد، κ کاردینالی باشد دلخواه و $\lambda\leq\kappa$ کاردینالی منتظم باشد (یعنی آنگونه که $cof(\lambda)=\lambda$.) آنگاه تئوریِ T دارای مدلی λاشباع است با اندازه‌ی κ. به ویژه اگر κ منتظم باشد، تئوریِ T دارای مدلی اشباع با اندازه‌ی κ است.

طرح اثبات. مدل دلخواهِ $T\models\mathfrak{M}$ را در نظر بگیرید و زنجیری مقدماتی مانند $\langle\mathfrak{M}_i|i<\lambda\rangle$ را از مدلهای T با استقراء چنان بسازید که

۱. $\mathfrak{M}_0=\mathfrak{M}$.

۲. برای هر $i<\lambda$ داشته باشیم $|M_i|<\lambda$.

۳. اگر $\lambda < \alpha$ حدی باشد، آنگاه $\mathfrak{M}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$.

۴. هر تایپِ متعلق به $S_۱(M_\alpha)$ در $M_{\alpha+۱}$ برآورده شود.

قرار دهید $\mathfrak{N} = \bigcup_{i<\lambda} \mathfrak{M}_i$ و با کمک گرفتن از فرضِ منتظم بودنِ λ نشان دهید که $\mathfrak{N}$ مدلی λ اشباع است. $\square$

قضیه ۲۱۷ (قضیه‌ی اصلیِ این جلسه): گیریم $\kappa \geq \aleph_۱$ و فرض کنیم که T یک تئوریِ κ جازم باشد. آنگاه یگانه‌ی مدلِ T (به هنگ ایزومرفیسم) از اندازه‌ی κ، اشباع است.

اثبات. اگر κ منتظم باشد، آنگاه از آنجا که هر تئوریِ جازم در یک کاردینالِ ناشمارا، ω پایدار است، بنا به قضیه‌ی قبل تئوری مورد نظر دارای مدلی اشباع با اندازه‌ی κ است. اگر κ تکین باشد، آنگاه برای هر $\kappa > \lambda$ کاردینالِ $\kappa > \lambda^+$ منتظم است. بنابراین یگانه‌ی مدلِ T با اندازه‌ی κ مدلی است λ^+ اشباع. با همین استدلال، مدل یادشده، برای هر $\kappa > \lambda'$ نیز λ'^+ اشباع است. پس این مدل، اشباع است. $\square$