۸.۲ جلسه‌ی بیست‌ویکم

در جلسه‌ی پیش ثابت کردیم که هر تئوریِ ω پایدار، کاملاً متعالی است. اثبات عکسِ این گفته را برای این جلسه وعده کرده بودیم. پیش از آن قضیه‌ی زیر را یادآوری می‌کنیم:

یادآوری ۲۰۴ (کانتور بندیکسون): اگر (X,d) یک فضای متریک کاملِ جدائی‌پذیر باشد، آنگاه $X = A \cup B$ که در آن A یک زیرفضای بسته‌ی تام است (یعنی همه‌ی عناصرِ آن حدی هستند) و B یک زیرفضای بازِ شمارا. (B را مجموعه‌ی نقاطِ پراکنده‌ی فضای X می‌خوانیم.). به ویژه اگر X ناشمارا باشد، $A \neq \emptyset$.

تمرین ۲۰۵: نشان دهید که با تعبیری مناسب، مرتبه‌ی مُرلی، معادل با مرتبه‌ی کانتور ـ بندیکسون است. به ویژه اگر تئوریِ‌مورد نظر ω پایدار باشد، همه‌ی نقاط در قسمت بازِ شمارا می‌افتند.

قضیه ۲۰۶ (قضیه‌ی اصلی): تئوریِ T کاملاً متعالی است اگروتنهااگر ωپایدار باشد.

اثبات. اگر تئوری T، ω پایدار نباشد مدلی شمارا چون $T \models \mathfrak{M}$ دارد، به طوری که $|S_n(M)| = 2^{\aleph_0}$. فرض کنیم که A زیرمجموعه‌ی بسته‌ی تامِ قضیه‌ی کانتوربندیسکون برای $S_n(M)$ باشد. گیریم $p(\bar{x}) \in A$. باز پایه‌ایِ $[\theta(\bar{x},\bar{m})]$ را چنان در نظر بگیرید که $p(\bar{x}) \in [\theta(\bar{x},\bar{m})]$. از آنجا که $A \cap [\theta(\bar{x},\bar{m})]$ ناتهی، و از این رو نامتناهی است، تایپی چون $p_1(\bar{x}) \neq p(\bar{x})$ در آن موجود است. فرض کنید که ψ از فرمولهای جداکننده‌ی p_1, p باشد؛ یعنی مثلاً $\psi \in p, \neg\psi \in p_1$. فرمولِ $\theta \wedge \psi$ را در گرِهی زیرِ فرمولِ θ قرار می‌دهیم. توجه می‌کنیم که $p_1 \in [\theta \wedge \neg\psi]$. به دلیلِ مشابه، $[\theta \wedge \neg\psi] \cap A$ نامتناهی، و ازاین رو شاملِ $p_2 \neq p_1$ است. فرض می‌کنیم که ψ_1 فرمول جداکننده‌ی p_1, p_2 باشد؛ فرض می‌کنیم که $\psi_2 \in p_1$ و $\neg\psi_2 \in p_2$. پس داریم $p_1 \in [\theta \wedge \neg\psi \wedge \psi_2]$ و $p_2 \in [\theta \wedge \neg\psi \wedge \neg\psi_2] \cap A$. مشابه بالا فرمول $\theta \wedge \neg\psi \wedge \psi_2$ را در گره زیرِ θ قرار می‌دهیم و همین کار را یافتنِ $p_3 \neq p_2$ و $p_3 \in [\theta \wedge \neg\psi \wedge \neg\psi_2] \cap A$ ادامه می‌دهیم. در این روند به درختی ω انشعابی ولی با ارتفاع ۱ می‌رسیم. از طرفی هر گره درخت را می‌توان در فراروند بالا قرار داد و بدینسان ω انشعاب به زیر آن زد. یعنی در تئوریمان یک درخت نامتناهیِ ω انشعابی داریم؛ به بیان دیگر تئوریِ ما کاملاً متعالی نیست.

$$\begin{tikzcd}
 & \theta \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\theta \wedge \psi & \theta \wedge \neg\psi \wedge \psi_2 & \ldots
\end{tikzcd}$$

$\square$

۹.۲ جلسه‌ی بیست و دوم

همان طور که دانسته‌ایم، وقتی $\mathrm{RM}(\phi(\bar{x},\bar{a}))=\alpha$ آنگاه در داخلِ $\phi(\bar{x},\bar{a})$ نمی‌توان نامتناهی فرمولِ مجزای با مرتبه‌ی مُرلی برابر با α پیدا کرد. به بیان دیگر، تعداد فرمولهای مجزای با مرتبه‌ی مرُلیِ برابر با α که هر کدامشان $\phi(\bar{x},\bar{a})$ را نتیجه می‌دهند متناهی است.

سوال ۲۰۷: اگر مرتبه‌ی مُرلی فرمولی برابر با α باشد، آیا ممکن است بشود برای هر $n\in\mathbb{N}$ به تعدادِ n فرمولِ مجزا با مرتبه‌ی مرلی برابر با α یافت که هر یک ϕ را نتیجه دهد؟

در ادامه ثابت خواهیم کرد که پاسخ سوال بالا منفی است؛ هرگاه $\mathrm{RM}(\phi(\bar{x},\bar{a}))=\alpha$ آنگاه عددی چون $d\in\omega$ چنان موجود است که تعداد فرمولهای مجزای نتیجه‌دهنده‌ی ϕ در داخلِ آن حداکثر برابر با d است. این عدد را **درجه‌ی مُرلیِ** [۱۵] فرمول $\phi(\bar{x},\bar{a})$ خواهیم نامید و آن را با $\deg(\phi(\bar{x},\bar{a}))$ نشان خواهیم داد.

بحث را با یک لم نظریه‌ی مجموعه‌ای می‌آغازیم.

لم ۲۰۸ (کونیگ): در هر درختِ نامتناهیِ به‌طورمتناهی‌شاخه‌زننده مسیری نامتناهی یافت می‌شود.

قضیه ۲۰۹: برای فرمولِ $\phi(\bar{x},\bar{a})$ با $\mathrm{RM}(\phi(\bar{x},\bar{a}))=\alpha$ عدد طبیعیِ $d\in\omega$ چنان موجود است که $\phi(\bar{x},\bar{a})$ را می‌توان به صورت اجتماعی از حداکثر d فرمولِ دوبه‌دومجزای با مرتبه‌ی مرُلی برابر با α نوشت. به بیان دیگر، فرمولهای $\psi_1,\ldots,\psi_d$ چنان موجودند که $\mathrm{RM}(\psi_i)=\alpha$ و $\phi=\bigvee_{i=1,\ldots,d}\psi_i$ و اگر فرمولهای دیگری چون ψ'_i با مرتبه‌ی مُرلی برابر با α یافت شوند به طوری که $\phi=\bigvee_{i=1,\ldots,k}\psi'_i$ آنگاه $k\leq d$.

تعریف ۲۱۰: اگرچنانکه در بالا $d=1$ فرمولِ $\phi(\bar{x},\bar{a})$ را تحویل‌ناپذیر [۱۶] می‌خوانیم. نیز اگر $\mathrm{RM}(\phi(\bar{x},\bar{a}))=\deg\phi(\bar{x},\bar{a})=1$ آنگاه فرمولِ $\deg\phi(\bar{x},\bar{a})$ را بسیارکمینال [۱۷] می‌خوانیم.

توجه ۲۱۱: برای توجیه وجه تسمیه‌ی «کاهش‌ناپذیر» خواننده را به قضایای زیر از نظریه‌ی اعداد، جبر و هندسه‌ی جبری توجه می‌دهیم:

---

[۱۵] Morley degree

[۱۶] irreducible

[۱۷] strongly minimal

گزاره ۲۱۲:

۱. هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت حاصلضربی متناهی از **اعداد اول** نوشت.

۲. هر گروه آبلی متناهیاً تولیدشده را می‌توان به صورت (تصویری ایزومرفیک) از جمعی مستقیم از **گروه‌های اولیه** نوشت.

۳. هر ایده‌آل را در یک حلقه‌ی نوتری، می‌توان به صورت اشتراکی متناهی از **ایده‌آلهای اولیه** نوشت.

۴. هر مجموعه‌ی جبری را می‌توان به صورت احتماعی متناهی از **چندگوناهای تحویل‌ناپذیر** نوشت.

اثبات قضیه‌ی **۲۰۹** . فرض کنید که $\mathrm{RM}(\phi(\bar{x},\bar{a}))=\alpha$. اگر داخلِ ϕ هیچ فرمول سره‌ای با مرتبه‌ی مُرلیِ مساوی با α یافت نشود، که هیچ؛ اگر تنها یک فرمولِ ψ با مرتبه‌ی مُرلی برابر با α یافت شود، همان را در زیرشاخه‌ای از ϕ قرار می‌دهیم؛ وگرنه فرض می‌کنیم که $\psi_۱,\psi_۲$ افرازی برای ϕ به دو فرمول باشد با مرتبه‌ی مُرلی برابر با α و به طوری که $\psi_۱\cap\psi_۲=\emptyset$. حال همین پردازش را برای هر یک از ψ_i ها انجام می‌دهیم تا به درختی متناهیاً شاخه‌زننده برسیم. اگر درخت یادشده نامتناهی باشد، آنگاه بنا بر لم کُنیگ می‌توان زنجیر زیر را از مجموعه‌های تعریف‌پذیر با مرتبه‌ی مرلی برابر با α یافت:

$$\phi\supsetneq\phi_۱\supsetneq\phi_۲\supsetneq\dots$$

می‌توان فرض کرد (چرا؟) که در زنجیر بالا برای هر i داریم

$$\mathrm{RM}(\phi_i-\phi_{i+۱})=\alpha.$$

پس گردایه‌ی نامتناهیِ $\{\phi_i-\phi_{i+۱}\}$ در داخلِ ϕ پدیدار می‌شود که این ناقض مرتبه‌ی مُرلی برابر با α است. پس **برای هر فرمولِ ϕ با** $\mathrm{RM}(\phi)=\alpha$ **روند درخت‌سازی با شاخه‌زدن بر زیرمجموعه‌های سره‌ی دوبه‌دومجزای با مرتبه‌ی مُرلیِ برابر با α پس از متناهی مرحله به پایان می‌رسد.**

فرض کنید که پس از پیمایش این روند برای ϕ به گردایه‌ی متناهیِ $\{\psi_i\}_{i=۱,\dots,k}$ از فرمولهای نشسته بر گره‌های انتهایی هر شاخه رسیده باشیم. توجه کنید که

۱. $\mathrm{RM}(\psi_i)=\alpha$.

۲. برای $i \neq j$ داریم $\psi_i \cap \psi_j = \emptyset$.

۳. $\bigvee_{i=۱}^{k} \psi_i = \phi$.

پس فرمولهای یادشده تجزیه‌ای برای ϕ به فرمولهای تحویل‌ناپذیرِ دارای مرتبه‌ی مُرلیِ α به دست می‌دهند. فرض کنیم این تجزیه به صورت $\phi = \bigvee_{i=۱,\dots,d} \phi_i(\bar{x}, \bar{d}_i)$ باشد. اگر ϕ را بتوان به گونه‌ی دیگری به صورت اجتماعِ k فرمول با مرتبه‌ی مرلی برابر با α نوشت. آنگاه

$$\bigvee_{i=۱,\dots,d} \phi_i(\bar{x}, \bar{d}_i) = \bigvee_{i=۱,\dots,k} \psi_i(\bar{x}, \bar{e}_i)$$

می‌خواهیم ثابت کنیم که $k \leq d$. برای این کار، با کمک ادعای زیر، نگاشتی یک‌به‌یک از $\{۱, \dots, k\}$ به $\{۱, \dots, d\}$ پیدا می‌کنیم.

برای $\alpha \in Ord$ روی فرمولهای با مرتبه‌ی مُرلیِ α رابطه‌ی $\simeq$ را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$\phi(\bar{x}, \bar{a}) \simeq \psi(\bar{x}, \bar{b}) \Leftrightarrow \mathrm{RM}(\phi \Delta \theta) < \alpha.$$

که در آن $\phi \Delta \theta = (\phi \wedge \neg\theta) \vee (\theta \wedge \neg\phi)$.

توجه کنید که $\mathrm{RM}(\phi \vee \theta) = \max(\mathrm{RM}(\phi \wedge \theta), \mathrm{RM}(\phi \Delta \theta))$، و نیز از طرفی $\mathrm{RM}(\phi \vee \theta) = \max(\mathrm{RM}(\phi), \mathrm{RM}(\theta))$. پس اگرچنانکه $\mathrm{RM}(\phi \Delta \theta)) < \alpha$ آنگاه $\mathrm{RM}(\phi \vee \theta) = \mathrm{RM}(\phi \wedge \theta) = \alpha$؛ به تعبیری، در این صورت دو فرمولِ ϕ, θ تقریباً بر هم منطبقند.

ادعای ۲۱۳: برای هر $۱ \leq i \leq k$ عدد یکتای $۱ \leq j \leq d$ چنان موجود است که

$$\psi_i(\bar{x}, \bar{d}_i) \simeq \phi_j(\bar{x}, \bar{e}_i).$$

در صورت وجود، یگانگی و یک‌به‌یک بودن چنین تابعی واضح است. در ادامه وجود آن را اثبات کرده‌ایم.

داریم $\psi_i \subseteq \bigvee_{i=۱,\dots,d} \phi_i$. بنابراین

$$\psi_i \wedge \phi = \bigvee_{j=۱,\dots,d} (\psi_i \wedge \phi_j)$$

که اجتماع بالا، مجزاست. پس $\alpha = \mathrm{RM}(\psi_i) = \max_{۱ \leq j \leq d}(\mathrm{RM}(\psi_i \wedge \phi_j))$ و از این رو $۱ \leq j \leq d$ چنان موجود است که $\mathrm{RM}(\psi_i \wedge \phi_j) = \alpha$.

از آنجا که فرمولِ ϕ_j تحویل‌ناپذیر است، داریم α؛ $\mathrm{RM}(\phi_j - \psi_i) < \alpha$ زیرا $\phi_j = (\phi_j \cap \psi_i) \cup (\phi_j - \psi_i)$ و اگر $\mathrm{RM}(\phi_j - \psi_i) = \alpha$ آنگاه تجویل‌ناپذیریِ ϕ_j نقض می‌شود.
به طور مشابه، $\mathrm{RM}(\psi_i - \phi_j) < \alpha$. در نتیجه $\mathrm{RM}(\psi_i \Delta \phi_j) < \alpha$؛ یعنی $\psi_i \simeq \phi_j$. $\square$