۷.۲ جلسه‌ی بیستم

در جلسه‌ی قبل دیدیم که وجود یک درختِ ω انشعابی، موجب بی‌نهایت شدنِ مرتبه‌ی مُرلیِ فرمول نشسته در بالاترین گره (و بدینسان همه‌ی فرمولهای نشسته در درخت) می‌شود.

تا اینجا، مرتبه‌ی مُرلی را در یک مدلِ خاص تعریف کرده‌ایم. در ادامه می‌خواهیم تعریف را طوری گسترش دهیم که وابستگی آن به مدلها برطرف شود. عموماً (در تئوریِ کامل) برای این کار دو رهیافت وجود دارد:

رویکرد اول. ویژگی مورد نظر را در یک مدلِ خاص تعریف کنیم و ثابت کنیم که این ویژگی تحت توسیعهای مقدماتی حفظ می‌شود. مثلاً قبلاً گفتیم که منظور از تایپ کامل، مجموعه‌ای بیشینال از فرمولهاست که با تئوری یک مدلِ M سازگارند. اگر p با تئوریِ M سازگار باشد، با تئوریِ هر توسیع مقدماتی از آن نیز سازگار است.

رویکرد دوم. یک مدل بسیار بزرگ را از تئوری تحت مطالعه در نظر گرفته فرض کنیم که همه‌ی مدلها به طور مقدماتی در آن می‌نشینند. سپس ویژگی مورد نظر را در آن مدل تعریف کنیم. وجود چنین مدلی، که آن را **مدل سترگ** [۱۴] یا **مدل هیولا** می‌خوانیم، در کلاس آموختال ثابت شده است.

بگذارید فعلاً بحث را با رویکرد اول ادامه دهیم، و سپس آن را برای جلوگیری از پیچیدگی‌های مصنوعی، در یک مدل سترگ پی بگیریم.

تمرین زیر را در کلاس آموختال حل کردیم:

تمرین ۱۹۶: فرض کنید که $\mathfrak{M}$ مدلی ωاشباع باشد. نشان دهید که هرگاه $\bar{a} \equiv \bar{b}$ آنگاه $\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(\bar{x},\bar{a}) = \mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(\bar{x},\bar{b})$.

گزاره ۱۹۷: اگر $\mathfrak{M} \models T$ مدلی ωاشباع باشد، آنگاه برای هر توسیعِ مقدماتیِ $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ و هر فرمولِ $\phi(\bar{x},\bar{a})$ با $\bar{a} \in M$ داریم

$$\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(\phi(\bar{x},\bar{a})) = \mathrm{RM}^{\mathfrak{N}}(\phi(\bar{x},\bar{a})).$$

به ویژه اگر $\mathrm{RM}^{\mathfrak{N}}(\phi(\bar{x},\bar{a})) = \infty$ آنگاه $\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(\phi(\bar{x},\bar{a})) = \infty$.

[۱۴] monster model

اثبات. به آسانی می‌توان نشان داد که (بنا به مقدماتی بودن توسیع)

$$\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(\phi(\bar{x},\bar{a})) \leq \mathrm{RM}^{\mathfrak{N}}(\phi(\bar{x},\bar{a})).$$

در ادامه به اثبات عکس نامساوی بالا پرداخته‌ایم.

فرض کنید که بدانیم که هرگاه $\mathrm{RM}^{\mathfrak{N}}(\phi(\bar{x},\bar{a})) \geq \alpha$ آنگاه $\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(\phi(\bar{x},\bar{a})) \geq \alpha$. می‌خواهیم همین را برای $\alpha+1$ ثابت کنیم. گیریم $\mathrm{RM}^{\mathfrak{N}}(\phi(\bar{x},\bar{a})) \geq \alpha+1$. پس فرمولهای $\{\psi_i(\bar{x},\bar{b}_i)\}_{i\in\omega}$ چنان موجودند که $\bar{b}_i \in N$ و $\mathfrak{N} \models \forall\bar{x} \quad (\psi_i(\bar{x},\bar{b}_i) \rightarrow \phi(\bar{x},\bar{a}))$ و نیز $\psi_i(\bar{x},\bar{b}_i)$ و $\psi_j(\bar{x},\bar{b}_j)$ برای $i\neq j$ در N با هم اشتراکی ندارند. به کمکِ اشباع بودن، دنباله‌ی $(\bar{b}'_i)_{i\in\omega}$ را از اعضای M به گونه‌ای می‌سازیم که برای هر $n\in\omega$

$$\bar{b}'_0\ldots\bar{b}'_n \equiv_a \bar{b}_0\ldots\bar{b}_n. \quad (*)$$

از معادله‌ی $(*)$ (و با کمک تمرینِ پیش از این گزاره) نتیجه می‌شود که فرمولهای $\psi_i(\bar{x},\bar{b}'_i)$ ضامن ایننده که $\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(\phi(\bar{x},\bar{a}) \geq \alpha+1$. $\square$

تئوریِ T کاملاً متعالی است اگروتنهااگر در یک مدلِ اشباعِ $T \models \mathfrak{M}$ برای هر $n\in\mathfrak{N}$ مرتبه‌ی مُرلیِ M^n اردینال باشد (بینهایت نباشد):

نتیجه ۱۹۸: موارد زیر با هم معادلند:

۱. تئوریِ T کاملاً متعالی است.

۲. برای هر مدلِ ωاشباعِ $\mathfrak{M}$ و هر فرمولِ $\phi(\bar{x},\bar{a})$ با پارامترِ $\bar{a}\in M$ داریم $\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(\phi(\bar{x},\bar{a}))\in Ord$؛ یعنی هر فرمول دارای مرتبه‌ی مُرلی (اردینالی و نه بی‌نهایت) است.

۳. مدلی ωاشباع مانند $\mathfrak{M}$ چنان موجود است که برای هر فرمولِ $\phi(\bar{x},\bar{a})$ با پارامترِ $\bar{a}\in M$ داشته باشیم $\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(\phi(\bar{x},\bar{a}))\in Ord$.

۴. مدلی ωاشباع مانندِ $\mathfrak{M}$ موجود است به طوری که برای هر $n\in\omega$ داریم $\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}(M^n)\in Ord$؛ به بیان دیگر فرمولِ $x_1=x_1\wedge\ldots\wedge x_n=x_n$ دارای مرتبه‌ی مُرلی است.

توجه ۱۹۹: در واقع در مورد آخر کافی است مرتبه‌ی مُرلیِ فرمولِ تک‌متغیره‌ی $x = x$ را لحاظ کنیم. اثبات این گفته فعلاً در برنامه‌مان نیست.

اثبات گزاره. ۴ به ۱. فرض کنید که ۴ برقرار باشد و در عین حال، مدلی چون $\mathfrak{N} \models T$ و فرمولی چون $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ چنان موجود باشند که $\mathrm{RM}^{\mathfrak{N}}(\bar{x}, \bar{a}) = \infty$. می‌دانیم که در مدلِ ω اشباعِ مورد ۴، که آن را $\mathfrak{M}$ می‌نامیم، مرتبه‌ی مرلی همه‌ی فرمولها کمتر از بی‌نهایت است. بنا به ویژگی ادغام مدلی چون $\mathfrak{Q}$ موجود است که هر دوی $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ به طور مقدماتی در آن می‌نشینند. این مدل را نیز ω اشباع فرض می‌کنیم. از $\mathrm{RM}^{\mathfrak{N}}(\phi(\bar{x}, \bar{a})) = \infty$ نتیجه می‌گیریم که $\mathrm{RM}^{\mathfrak{Q}}(\phi(\bar{x}, \bar{a})) = \infty$. از آنجا که $\mathfrak{M}$ مدلی ω اشباع است، در آن عنصری چون a' موجود است که $a \equiv a'$. پس $RM^{\mathfrak{Q}}((\phi(\bar{x}, \bar{a}')) = \mathrm{RM}^{\mathfrak{Q}}(\phi(\bar{x}, \bar{a})) = \infty$. از آنجا که $\mathfrak{M}$ مدلی ωاشباع است

$$\mathrm{RM}^{\mathfrak{M}}((\phi(\bar{x}, \bar{a}')) = \mathrm{RM}^{\mathfrak{Q}}(\phi(\bar{x}, \bar{a}')) = \infty;$$

پس $RM^{\mathfrak{M}}(\bar{x} = \bar{x}) = \infty$ (زیرا بوضوح $\bar{x} = \bar{x} \supseteq \phi(\bar{x}, \bar{a})$) که این با ۴ در تناقض است. □

در کلاس آموختال ثابت کردیم که در یک نظریه‌ی مناسب برای مجموعه‌ها و کلاسها می‌توان زنجیری مقدماتی چون $(M_\alpha)_{\alpha \in Ord}$ از مدلها ساخت، به طوری که همه‌ی تایپها در هر مدلِ M_α در مدل $M_{\alpha+1}$ برآورده شوند. مدلِ $\mathfrak{M} = \bigcup \mathfrak{M}_i$ مدلی است با اندازه‌ی کلاسی (و نه مجموعه‌ای) و κ اشباع برای هر کاردینالِ κ. نیز همه‌ی مدلهای مجموعه‌ایِ T در آن به صورت مقدماتی می‌نشینند. این مدل، به پیمانه‌ی ایزومرفیسم یکتاست و آن را مدلِ سترگ، یا مدلِهیولای تئوریِ T می‌خوانند. **از این پس وقتی صحبت از مدل، مجموعه یا عنصری شود، منظور زیرمدلی مقدماتی یا زیرمجموعه و یا عنصری از آن مدل سترگ است. این مدل از این پس با $\mathbb{M}$ نشان داده‌ایم.** نیز هر جا برای مرتبه‌ی مُرلی یا تایپ به مدلِ محیط اشاره نشده باشد، مدلِ مورد نظر همان مدل سترگ است. همان گونه که گفتیم، برای کنترل ویژگی‌های مقدماتی، یعنی هر ویژگی‌ای که تحت توسیع‌های مقدماتی حفظ می‌شود، کار در مدل سترگ راحتتر است.

در زیر تعریفِمرتبه‌ی مرلی را به تایپها گسترش داده‌ایم.

تعریف ۲۰۰ (مرتبه‌ی مُرلی): برای مجموعه‌ی A و تایپِ $p(\bar{x}) \in S_n(A)$ تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{RM}(p(\bar{x})) = \min(\mathrm{RM}(\phi(\bar{x}, \bar{a}))|\phi(\bar{x}, \bar{a}) \in p)$$

اگر T کاملاً متعالی باشد، برای هر تایپِ $p(\bar{x})$ داریم $\mathrm{RM}(p(\bar{x})) \in Ord$. اگر $p(\bar{x}) = \mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ به جای $\mathrm{RM}(p(\bar{x}))$ گاهی می‌نویسیم $\mathrm{RM}(\bar{a}/A)$. پس

$$\mathrm{RM}(\bar{a}/A) = \min(\mathrm{RM}(\phi(\bar{x}, \bar{b})|\mathbb{M} \models \phi(\bar{a}, \bar{b}), \bar{b} \in A).$$

توجه ۲۰۱: مرتبه‌ی مرلی، مفهومی از استقلال به دست می‌دهد. برای مجموعه‌های $A \subseteq B$ و عنصرِ a می‌نویسیم $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\vert}_A B$ هرگاه $\mathrm{RM}(\bar{a}/A) = \mathrm{RM}(\bar{a}/B)$. در تئوریهای کاملاً متعالی، این استقلال خوش‌رفتاری‌های مورد انتظار از یک رابطه‌ی استقلال را دارد:

همنوایی و تعدی اگر $A \subseteq B \subseteq C$ آنگاه

$$\left(\bar{a} \underset{A}{\downarrow} B \quad \wedge \quad \bar{a} \underset{B}{\downarrow} C\right) \quad \Leftrightarrow \bar{a} \underset{A}{\downarrow} C.$$

ناوردایی تحت اتومرفیسمها

$$\bar{a} \underset{A}{\downarrow} B \Leftrightarrow f(\bar{a}) \underset{f(A)}{\downarrow} f(B) \quad \forall f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{M}).$$

تقارن

$$\bar{a} \underset{A}{\downarrow} \bar{b} \Leftrightarrow \bar{b} \underset{A}{\downarrow} \bar{a}.$$

ویژگی تناهی برای هر مجموعه‌ی A و عنصرِ $\bar{a}$ زیرمجموعه‌ای متناهی چون $A' \subseteq A$ چنان موجود است که $\bar{a} \downarrow_{A'} A$.

ویژگی استقلال اگر شرایط زیر برقرار باشند:

$$a \underset{A}{\downarrow} a', \quad b \underset{A}{\downarrow} b', \quad a' \underset{A}{\downarrow} b'$$

$$a \equiv_A b$$

آنگاه عنصرِ c چنان موجود است که

$$c \underset{A}{\downarrow} a'b', \quad c \equiv_{Ma'} a, \quad c \equiv_{Mb'} b.$$

مشاهدات ۲۰۲:

۱. در کلاس تمرین، ثابت کردیم که اگر تئوری T داشته باشیم $\mathrm{RM}(\phi(\bar{x},\bar{a}))=\alpha$ آنگاه برای هر $\beta<\alpha$ فرمولی چون $\theta(\bar{x},\bar{b})$ چنان موجود است که $\vdash\theta\to\phi$ و $\mathrm{RM}(\theta)=\beta$؛ یعنی مرتبه‌ی مرلی، مقادیر را به صورت پیوسته اتخاذ می‌کند.

۲. گفته‌ی بالا، بالاخص برای فرمولِ $\bar{x}=\bar{x}$ برقرار است. اگر تئوریِ T کاملاً متعالی باشد، $\mathrm{RM}(\bar{x}=\bar{x})<\infty$. فرض کنیم $\mathrm{RM}(\bar{x}=\bar{x}))=\mathrm{RM}(\mathbb{M}^n)=\alpha$. در این صورت برای هر $\beta<\alpha$ فرمولی با مرتبه‌ی مرلیِ برابر با β موجود است.

۳. فرض کنیم $\mathrm{RM}(\phi(\bar{x},\bar{a}))<\alpha$. قبلاً گفته‌ایم که $\mathrm{RM}(\phi(\bar{x},\bar{a}))$ به $\mathrm{tp}(\bar{a})$ بسته است؛ یعنی اگر $\mathrm{tp}(\bar{b})=\mathrm{tp}(\bar{a})$ آنگاه $\mathrm{RM}(\phi(\bar{x},\bar{a}))=\mathrm{RM}(\phi(\bar{x},\bar{b}))$. بنابراین تعدادِ مقادیرِ متصورَ برای $\mathrm{RM}(\phi(\bar{x},\bar{a}))$ حداکثر برابر با تعداد تایپهای n متغیره است؛ یعنی برابر با $|S_n(T)|$. پس تعداد این مقادیر حداکثر برابر با $۲^{\aleph_۰}$ است.

۴. گفته‌های بالا را به هم می‌آمیزیم:

$$|\{\mathrm{RM}(\phi(\bar{x},\bar{a}))|\bar{a}\in\mathbb{M}\}|\leq ۲^{\aleph_۰} \quad \text{بنا به ۳}$$

$$|\{\mathrm{RM}(\phi(\bar{x},\bar{a}))|\bar{a}\in\mathbb{M}\}|=\alpha \quad \text{بنا به ۱و۲}$$

پس $|\alpha|<۲^{\aleph_۰}$. بنابراین $\alpha<(۲^{\aleph_۰})^+$.

۵. اگر تئوریِ مورد نظر ω پایدار بود، می‌داشتیم $\alpha_۱<\aleph_۱$.

۶. پس در یک تئوریِ ωپایدار اگر مرتبه‌ی مرلی یک فرمول، بی‌نهایت نباشد، حتماً از $(۲^{\aleph_۰})^+$ کمتر است.

مشاهده‌ی بالا ما را برای اثبات قضیه‌ی زیر آماده می‌سازد:

قضیه ۲۰۳: هر تئوریِ ω پایدار، کاملاً متعالی است.

اثبات. فرض کنیم در یک تئوریِ ω پایدار داشته باشیم $\mathrm{RM}(\bar{x}=\bar{x})=\infty$. در مشاهدات بالا گفتیم که اگر مرتبه‌ی مرلی یک فرمول، بی‌نهایت نباشد، حتماً از $(۲^{\aleph_۰})^+$ کمتر است. از آنجا که

$\mathrm{RM}(\bar{x} = \bar{x}) \geq (2^{\aleph_0})^+ + 1$ فرمولهای دو به دو مجزای $\{\psi_i\}_{i\in\omega}$ باید موجود باشند که مرتبه‌ی مرلی هر یک حداقل $(2^{\aleph_0})^+$ است. پس مرتبه‌ی مرلی هر یک از این فرمولها نیز بی‌نهایت است. دو فرمولِ اینچنین، مثلاً ψ_0, ψ_1 را، در درختی در زیرِ $\bar{x} = \bar{x}$ قرار می‌دهیم. از آنجا که $\mathrm{RM}(\psi_0) = \infty$ به طور مشابه، دو فرمولِ مجزای ψ_{00}, ψ_{01} یافت می‌شوند که ψ_0 آنها را در بردارد؛ و بدینسان می‌توان به درختی رسید از فرمولهای دو به دو مجزا در هر طبقه‌ی افقی، و با مرتبه‌ی مُرلیِ بی‌نهایت. وجود چنین درختی، موجب افزایش تعداد تایپها و نقضِ ω پایدار بودن می‌شود.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \bar{x} = \bar{x} & & & \\
 & \psi_0 \arrow[urr] & & & & \psi_1 \arrow[ull] & \\
\psi_{00} \arrow[ur] & & \psi_{01} \arrow[ul] & & \psi_{10} \arrow[ur] & & \psi_{11} \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

$\square$

در جلسه‌ی بعد عکس قضیه‌ی بالا را ثابت می‌کنیم.