پاسخِ تمرینِ ۹

تمرین ۳۳: فرض کنید در تئوریِ T هر تایپی از بخشِ بدون سورِ خود نتیجه شود. نشان دهید که در T سورها حذف می‌شوند.

اثبات. بنا به قسمتِ الفِ تمرینِ فلان کافی است نشان داد که هر فرمول داده‌ی شده‌ی ϕ، از نتایج بدون سورِ خود نسبت به T (که مجموعه‌ی آنها را در اینجا با Γ نشان می‌دهم) نتیجه می‌شود.

به برهان خلف، اگر $\Gamma \cup T \cup \{\neg\phi(x)\}$ مجموعه‌ای سازگار از فرمولها باشد، آنگاه مدلی چون $M \models T$ و عنصری چون $c \in M$ چنان یافت می‌شوند که $\Gamma \cup \neg\phi(x) \in \mathrm{tp}^M(c)$. سمت چپِ دیاگرام زیر را در نظر بگیرید (که سمت راستش در دست معرفی است!):

$$\begin{tikzcd} M & N \\ \langle c\rangle \arrow[u] \arrow[r, "\cong"'] & \langle d\rangle \arrow[u] \end{tikzcd}$$

ادعا می‌کنم که $\mathrm{Diag}(\langle\, c\rangle) \cup T \cup \{\phi(x)\}$ سازگار است، یعنی مدلی موجود است چون N و در آن عنصری چون d به طوری که $N \models \phi(d)$ و $\mathrm{qftp}^N(d) = \mathrm{qftp}^M(c)$ (همانند تصویر). توجه کنید در $\mathrm{Diag}(\langle c\rangle)$ نیز x را متغیر آزاد گرفته‌ام؛ یعنی گرفته‌ام

$$\mathrm{Diag}\langle c\rangle = \{\phi(x) \in qf(L) | M \models \phi(c)\}$$

اما این در حالی است که

$$\mathrm{qftp}^M(c) = \mathrm{qftp}^N(d)$$

و از این رو، بنا به فرض باید تایپهای c و d با هم برابر باشند (یعنی این که $\phi \in \mathrm{tp}(d)$ و $\neg\phi \in \mathrm{tp}(c)$ تناقض است).

ادعا: $\mathrm{Diag}(\langle c\rangle) \cup T \cup \{\phi\}$ سازگار است.

در غیر این صورت، $T \cup \mathrm{Diag}(\langle c\rangle) \vdash \neg\phi(x)$. بنابراین، فرمولهای $\psi_۱, \ldots, \psi_n \in \mathrm{Diag}(\langle c\rangle)$ چنان موجودند که

$$T \models \bigwedge \psi_i(x) \to \neg\phi(x)$$

یعنی

$$T \models \phi(x) \to \bigvee \neg\psi_i(x);$$

و این یعنی $\bigvee \neg\psi_i(x) \in \Gamma$. پس داریم $c \models \bigvee \neg\psi_i(x)$، که این با $\psi_i \in \mathrm{Diag}(\langle c\rangle)$ متناقض است. $\square$