لم زرن

اگر $(X,\le)$ یک مجموعه مرتب جزئی ناتهی باشد بطوری که هر زنجیر $A\subseteq X$ دارای یک کران بالا در X باشد. آنگاه X دارای حداقل یک عنصر ماکزیمال است.

اصل انتخاب

اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از مجموعه‌ها باشد آنگاه

$$\exists f: I \to \bigcup A_i$$

$$\forall i\in I \quad f(i)\in A_i$$

قضیه

لم زرن از اصل انتخاب نتیجه می‌شود.

اثبات

فرض کنید X یک مجموعه مرتب جزئی ناتهی باشد که هر زنجیر در آن دارای یک کران بالا است.

هدف: پیدا کردن یک عنصر ماکزیمال برای X.

فرض کنید $x\in X$.

فرض کنید g یک تابع انتخاب به صورت زیر باشد.

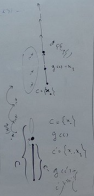
$$\mathcal{A} = \{\text{همه زنجیرهای } X\} \xrightarrow{g} X$$

$$\text{زنجیر } C \longmapsto g(C)$$

یک کران بالای اکید آن است.

یک زنجیر C را یک زنجیر مطلوب می‌نامیم هرگاه

1. C زنجیر باشد: $\forall x,y\in C \ (x\le y \vee y\le x)$
2. $\min C = x$
3. C خوش ترتیب باشد (یعنی هر زیرمجموعه از C دارای مینیمم باشد)
4. اگر $C'\subseteq C$ یک بخش ابتدایی از C باشد آنگاه $\min (C - C') = g(C')$

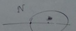


تعریف مجموعه $(A, \le)$ را خوش‌ترتیب می‌نامیم

هرگاه هر زیرمجموعه $A \supseteq B$ عنصر ابتدا (مینیموم) داشته

باشد. مثلاً $(N, \le)$ خوش‌ترتیب است. (ثابت کنید)

$(\mathbb{Z}, \le)$ خوش‌ترتیب نیست)



قضیه

اگر $(A, \le)$ خوش‌ترتیب باشد آن‌گاه هیچ زنجیر

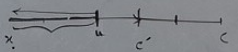
نزولی نامتناهی $x > x_1 > x_2 > \cdots$ در A وجود ندارد.

اثبات فرض کنید زنجیر نزولی $x > x_1 > \cdots$ وجود داشته باشد. از آنجا که A خوش‌ترتیب است

مجموعه $B = \{x, x_1, \ldots\}$ دارای مینیموم است. داریم $a = x_n$ $\exists n$ بنابراین این زنجیر از x_n به بعد متوقف می‌شود.

تعریف

زنجیر C' را بخش ابتدایی زنجیر C می‌نامیم هرگاه



$\forall u \in C' \quad \{x \in C' \mid x < u\} = \{x \in C \mid x < u\}$

$\{0,1,2,3,4,5\} \subseteq \mathbb{N}$ بخش ابتدایی

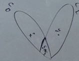
$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ بخش ابتدایی $\mathbb{R}$ نیست

$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$

$\{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$

لم اگر C_1, C_2 دو زنجیر مطلوب باشند آن‌گاه یا $C_1 \subseteq C_2$

یا $C_2 \subseteq C_1$

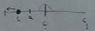


اثبات

فرض کنید x کوچکترین عنصری باشد که $x \in C_1 - C_1 \cap C_2$.

(ثابت خواهیم کرد که $C_1 \cap C_2$ بخش ابتدایی C_1, C_2 است) پس $x = g(C_1 \cap C_2)$ پس $x \in C_2$ که [illegible]

لم: اگر $C_0 \subseteq C_2$ آنگاه C_0 یک بخش ابتدایی از C_2 است.



اثبات: فرض کنید $u \in C_0$. ادعا:

$$\{x \in C_0 \mid x < u\} = \{x \in C_1 \mid x < u\}$$

فرض کنید $t \in C_1$, $t < u$.

ادعا: $t \in C_0$.

به برهان خلف فرض کنید $t \notin C_0$. پس مجموعه $C_1 \supseteq \overbrace{\{h \mid h \in C_1 - C_0 ,\ h < u\}}^{A}$ ناتهی است. پس A دارای مینیمم است. یعنی عنصر $h \in C_1$ موجود است به طوری که $h \in C_1 - C_0$, $h < u \in C_0$. از آنجا که h مینیمم مجموعه یاد شده است

$$\{v \in C_0 \mid v < h\} = \{v \in C_1 \mid v < h\}$$

از این رو $h = g(\{\text{عناصر قبلی}\})$

$\in C_0$.

لم: $C_1 \cap C_2$ بخش ابتدایی C_1 , C_2 است.

اثبات: کافی است نشان دهیم که $C_1 \cap C_2$ خود یک زنجیر مطلوب است.

اثبات

زنجیر بودن: $x, y \in C_1 \cap C_2$ آنگاه $x, y \in C_1$ پس $x \le y$ یا $y \le x$.

خوش‌ترتیب بودن: فرض کنید $A \subseteq C_1 \cap C_2$ آنگاه

$x_1 = \min A \cap C_1$

$x_2 = \min A \cap C_2$

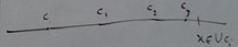
$\min A = \min \{x_1, x_2\}$

مطلوب بودن: فرض کنید $D \subseteq C_1 \cap C_2$ یک زیربخش باشد. اولین عنصر C_1 که بعد از D قرار دارد $g(D)$ است. به همین ترتیب اولین عنصر C_2 که بعد از D قرار دارد هم $g(D)$ است.

$$g(D) \in C_1 \cap C_2$$

لم: فرض کنید $\mathcal{B} = \{$ همه زنجیرهای مطلوب $\}$

مثلاً $\mathcal{B} = \{C_i\}_{i \in I}$



ادعا: $\bigcup_{i \in I} C_i$ یک زنجیر مطلوب است.

اثبات

خوش ترتیب بودن

فرض کنید $\bigcup_{i \in I} C_i$ خوش ترتیب نباشد.

زیرا دنباله‌ای نامتناهی $y > y_1 > y_2 > \dots$ در $\bigcup_{i \in I} C_i$

وجود دارد (؟)، پس $y \in \bigcup_{i \in I} C_i$ زیرا $y \in C_{i_0}$ $(\exists i_0 \in I)$

در زنجیر فوق کامل (؟) ... باید دانیم گرفت. پس یک زنجیر مطلوب است (خوش ترتیب است)

تمرین

سایر ویژگی‌های مطلوب بودن $\bigcup C_i$ را بررسی کنید.

$\bigcup_{i \in I} C_i = H =$ اجتماع تمامی زنجیرهای مطلوب. یک زنجیر مطلوب است.

به طور خاص این اجتماع، یک زنجیر است. اگر کران بالای زنجیر H در خود زنجیر H باشد

آن گاه این کران بالا، یک عنصر ماکزیمال است. اگر این زنجیر دارای کران بالا باشد که در خود زنجیر نباشد

آن گاه $g(H)$ یکی از کران‌های بالا را برای

$H \cup g(H)$ یک زنجیر

مطلوب با انتخاب می‌کند. پس

بزرگتر از H است. H بزرگترین زنجیر مطلوب است