یادآوری

۱- اگر $|x| \le |y|$ و $|y| \le |x|$

۲- آنگاه $|x| = |y|$.

مثال

نشان دهید که $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

پاسخ: اولاً تابع همانی $i: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$

یک به یک است پس $|\mathbb{N}| \le |\mathbb{Q}|$ یعنی $\aleph_0 \le |\mathbb{Q}|$ ①

ثانیاً تابع زیر

$$f: \mathbb{Q} \to \mathbb{N}^2$$

$$\frac{m}{n} \longmapsto (m,n)$$

$(m,n)=1$

یک به یک است. پس $|\mathbb{Q}| \le \aleph_0$. ②

بنابراین $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

تعاریف

فرض کنید X یک مجموعه باشد و $\le$ یک رابطه روی X باشد.

می‌گوییم رابطهٔ $\le$ یک ترتیب جزئی روی X است هرگاه ویژگی‌های زیر را داشته باشد.

① $\forall x \in X \quad x \le x$

② $\forall x,y,z \in X \quad (x \le y \wedge y \le z \to x \le z)$

اگر $\le$ دارای ویژگی زیر نیز (به علاوهٔ دو ویژگی قبلی) باشد آنگاه $\le$ یک ترتیب خطی گفته می‌شود.

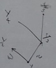
③ $\forall x,y \in X \quad (x \le y \vee y \le x)$

مثال

فرض کنید Y یک مجموعه باشد. روی $P(Y)$ رابطه $\preceq$ را به صورت زیر در نظر بگیرید. ترتیب شمول

$$Y_1 \preceq Y_2 \iff Y_1 \subseteq Y_2$$

سوال: آیا ترتیب خطی است؟ خیر (چرا؟)



مثال

روی $\mathbb{N}$ ترتیب $\le$ را در نظر بگیرید.

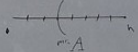
این ترتیب، خطی است.

توجه کنید که هر زیرمجموعه از $\mathbb{N}$ با ترتیب $\le$ دارای عضو ابتدا است.

$A \subseteq \mathbb{N}$

$\downarrow$

n_A



ولی اگر ترتیب عادی $\le$ را روی $\mathbb{R}$ در نظر بگیریم لزوماً هر زیرمجموعه از $\mathbb{R}$ دارای عضو ابتدا نیست.

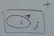
$(0, 1)$

مثال

روی $P(Y)$ ترتیب زیر را نیز می‌توان در نظر گرفت.

$$Y_1 \preceq Y_2 \iff Y_1 \supseteq Y_2$$

تعریف



فرض کنید $(X, \leq)$ یک مجموعهٔ مرتب جزئی باشد، و فرض کنید $A \subseteq X$.

الف) می‌گوییم عنصر x ماکزیمم A است هرگاه

$$\begin{cases} x \in A \\ \text{و} \\ \forall y \in A \quad y \leq x \end{cases}$$

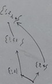
یعنی اولاً x با تمام اعضا مقایسه‌پذیر باشد.
ثانیاً $x \geq y$

$\{1,2,3\}$

$A \subseteq \mathbb{N}$

$3 = \max A$

$X = \{\{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{3,4\}\}$



$\max(X, \subseteq) = \{1,2,3,4\}$

ب) می‌گوییم عنصر $y \in X$ یک کران بالا برای A است

هرگاه $\forall a \in A \quad a \leq y$

توجه: یک کران بالای A لزوماً در A نیست.
ولی اگر باشد همان ماکزیمم A است.

ج) می‌گوییم $x \in A$ یک عنصر ماکزیمال در A است

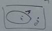
هرگاه $\forall a \in A \quad \neg(a \gneq x)$

یعنی برای هر $a \in A$ یا $a \leq x$ یا a با x مقایسه‌پذیر نباشد.

مثال مجموعه:

$a \leq b$
$a \leq c$
$d \leq a$
$d \leq b$
$d \leq c$

ماکزیمم ندارد ولی دو عنصر ماکزیمال دارد
b, c



$(X, \le)$ مرتب جزئی، $A \subseteq X$

تمرین

نشان دهید که A max در صورت وجود، یکتاست.

ولی عنصر ماکزیمال A یکتا لزوماً نیست.

اصلاح مرتب جزئی

① $\forall x \quad x \le x$

② $\forall x,y \quad x \le y \wedge y \le x \to x = y$

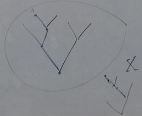
③ $\forall x,y,z \quad x \le y \wedge y \le z \to x \le z$

توجه: نماد $\le$ با مساوی فرق دارد:

$\forall x,y \quad x \le y \vee y \le x$

$A \subseteq (X, \le)$

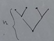
② اگر $(A, \le)$ مرتب خطی باشد می‌گوییم A یک زنجیر در X است.



نکته‌ی جالب با ربط

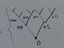
سؤال: تعداد مسیرهای این درخت چند است؟

2^n



تعداد مسیرها = تعداد دنباله‌های صفر و یک: $2^{\aleph_0}$

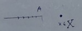
تعداد گره‌ها = تعداد دنباله‌های متناهی از ۰ و ۱: $\aleph_0$



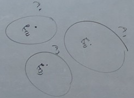
قضیه

فرض کنید $(X, \le)$ یک مجموعه مرتب جزئی ناتهی باشد.

فرض کنید هر زنجیر $A \subseteq X$ دارای یک کران بالا در X باشد.



$\{1,2,3\}$ — $A_1 \cup A_2 \cup A_3$



یادآوری اصل انتخاب

اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از مجموعه‌های ناتهی باشد

آنگاه یک تابع $f: I \to \bigcup A_i$

$\forall i\in I \quad f(i)\in A_i$

توجه

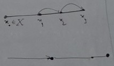
قضیه

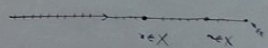
لم زرن $\models$ اصل انتخاب + اصول ZF

بدون اصل انتخاب

اصل انتخاب $\models$ لم زرن + اصول ZF

X





حکم قضیه

آنگاه X دارای حداقل یک عنصر ماکزیمال است.

قضیه Zorn

اصل انتخاب از لم زرن نتیجه می‌شود.

(یعنی اگر لم زرن درست باشد اصل انتخاب برقرار است).

لم زرن اگر $(X,\le)$ یک ... باشد که هر زنجیر $a\in X$
دارای کران بالا باشد آنگاه X دارای ماکزیمال باشد

اثبات

① فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد.

② فرض کنید لم زرن درست باشد

هدف پیدا کردن یک تابع انتخاب

$f: I \to \bigcup A_i$

$f(i)\in A_i$

مجموعه X را بصورت زیر در نظر بگیرید

$X =$ مجموعه‌ی تمامی توابع انتخاب جزئی از زیرمجموعه‌ی I به $\bigcup A_i$

ادعا $X\neq\emptyset$. مثلاً اگر $A_t\neq\emptyset$ ، $x_t\in A_t$.

$f:\{t\}\to A_t$

$t\mapsto x_t$

روی X ترتیب زیر را تعریف می‌کنیم.

مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها

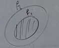
$f_1 \le f_2 \iff f_1\subseteq f_2$

$\{(a,b),\dots\}$

f_2 توسیعی از f_1 باشد

$\overset{\text{معادل}}{\iff} \mathrm{dom} f_1\subseteq \mathrm{dom} f_2 \ \&\ \forall x\in \mathrm{dom} f_1$

$f_1(x)=f_2(x)$



(تمرین: نشان دهید $\le$ یک ترتیب جزئی است)

ادعا اگر $\{f_j\}_{j\in J}$ یک زنجیر در X باشد

آنگاه این زنجیر دارای یک کران بالا در X است

ادعا: $\bigcup_{j\in J} f_j \in X$ یک کران بالا برای $\{f_j\}_{j\in J}$ است.

سوال (تمرین)

① چرا اجتماع یک تابع است؟

② چرا یک تابع انتخاب جزئی است؟

③ چرا $\forall j\in J$ ؛ $f_j \subseteq \bigcup f_i$

تابع بودن

$$(x,y) \wedge (x,y') \in \bigcup_{j\in J} f_j \Rightarrow$$

$$\exists j_1, j_2 \in J \left((x,y) \in f_{j_1} \wedge (x,y') \in f_{j_2} \right) \xRightarrow[f_{j_1} \subseteq f_{j_2}]{\text{بدون کاستن از کلیت}} (x,y) \wedge (x,y') \in f_{j_2}$$

$$\xRightarrow{\text{تابع است } f_{j_2}} y = y'$$

X در شرایط لم زرن صدق می‌کند. پس دارای یک عنصر ماکزیمال است. فرض کنید $F \in X$ عنصر ماکزیمال X باشد.

یک تابع انتخاب جزئی ماکزیمال

ادعا: F یک تابع انتخاب از I به $\bigcup_{i\in I} A_i$ است.

تنها باید ثابت کنیم که دامنه F تمام I است.

به برهان خلف فرض کنید $i \in I - \mathrm{Dom}\, f$

می‌دانیم که $A_i \neq \emptyset$. فرض کنید $t \in A_i$.

حال $F \cup \{(i,t)\} \supsetneq F$ یک تابع انتخاب جزئی است.

و این با ماکزیمال بودن F در تناقض است.