یادآوری

گفتیم که اگر X یک مجموعه باشد، مجموعهٔ 2^X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$2^X = \{ f \mid f: X \to \{0,1\} \text{ تابع} \}$$

توجه $|2^X| \cong |P(X)|$

زیرمجموعه‌های X $\Longleftrightarrow$ توابع از X به $\{0,1\}$

Y

$Y \to 1$

$X - Y \to 0$

0	1	1	0	1	0
x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

همچنین ثابت کردیم که $|X| < |P(X)| = |2^X|$.

به طور خاص $|P(\mathbb{N})| = |2^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$.

توجه $2^{\mathbb{N}}$ تمام توابع از $\mathbb{N}$ به $\{0,1\}$ را نشان می‌دهد.

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	...
f	1	0	1	0	1	0		...

$2\ 2\ 2\ 2\times 2\times 2 = 2^{\aleph_0}$

هر تابع از $\mathbb{N}$ به $\{0,1\}$ متناظر با یک دنبالهٔ شمارا از 0 و 1 است.

از طرفی هر عدد حقیقی را می‌توان به صورت یک دنبالهٔ شمارا از 0 و 1 نمایش داد.

پس تعداد اعداد حقیقی برابر است با تعداد دنباله‌های 0 و 1 و حال اعداد طبیعی برابر است با تعداد کل زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی برابر است با $2^{\aleph_0}$.

$$|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$$

اثبات قطری کانتور

تعداد اعداد حقیقی شمارش‌پذیر نیست.

اثبات: هر عدد حقیقی را می‌توان به صورت دنباله‌ای از ۰ و ۱ ها نوشت (مبنای ۲). فرض کنید که اعداد حقیقی را بتوان لیست کرد.

لیست اعداد حقیقی

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & \boxed{a_{00}} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \cdots \\
1 & a_{10} & \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \cdots \\
2 & a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots \\
3 & & & & \\
\vdots & & & &
\end{array}
$$

$a_{ij} \in \{0,1\}$

هدف: ارائه یک عدد حقیقی که در لیست بالا وجود ندارد. یعنی ارائه یک عدد حقیقی که با همه اعداد حقیقی موجود در لیست بالا متفاوت است.

عدد زیر را در نظر بگیرید.

$x = \boxed{\bar{a}_{00}}\ \boxed{\bar{a}_{11}}\ \boxed{\bar{a}_{22}}\ \boxed{\bar{a}_{33}}\ \boxed{\bar{a}_{44}}\ \boxed{\cdots}\ \cdots$

عدد x با هر یک از اعداد موجود در لیست بالا حداقل در یک رقم متفاوت است. و این متناقض با شمارا بودن $\mathbb{R}$ است.

تعداد تمام الگوریتم‌ها شماراست. فرض کنید لیست تمام الگوریتم‌ها را داشته باشیم ...... A_3 ، A_2 ، A_1 ، A_0

مسئلهٔ توقف (Halting problem)

آیا می‌توان یک الگوریتم جامع نوشت به طوری که تعیین کند که آیا الگوریتم iام در ورودی i متوقف می‌شود یا خیر.

Yes

No

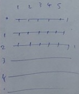
پاسخ: خیر. برهان خلف

اثبات: فرض کنید چنین الگوریتمی موجود باشد و نام آن را h بگذاریم.

الان می‌توان تابع (الگوریتم) g را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$
g(e) = \begin{cases} \text{Yes} & \text{اگر الگوریتم } e \text{ ام با ورودی } e \text{ نایستد} \\ \text{loop} & \text{در غیر این صورت} \end{cases}
$$

الگوریتم g در لیست ما قرار دارد. مثلاً الگوریتم kام در لیست ما باشد.



سوال

آیا این الگوریتم k ام [illegible] k متناهی است؟

جواب: متناهیه ⟸ متناهیه!

تعریف

مجموعه‌ی X را ناشمارا یا غیرقابل شمارش گوییم هرگاه $\aleph_0 < |X|$.

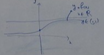
برای مثال $\mathbb{R}$ ، $P(\mathbb{N})$ ناشمارا هستند.

سوال

عدد اصلی بازه‌ی $(0,1)$ چقدر است؟

ادعا $(0,1) \cong \mathbb{R}$

(دو راه [illegible] می‌کنیم)



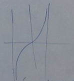
تعداد تمام الگوریتم‌ها شماراست. فرض کنید لیست تمام الگوریتم‌ها را داشته باشیم ... $A_1, A_2, A_3, \ldots$

مثال: تابع tan را در نظر بگیرید.

$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$

$\tan : (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \to \mathbb{R}$

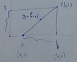
یک به یک و پوشاست.



نتیجه: $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \cong \mathbb{R}$

مثال: فرض کنید $a, b \in \mathbb{R}$.

آنگاه $(a,b) \cong (0,1)$



خط به معادله

$y = (b-a)(x-a)$

یک تابع یک به یک و پوشا از (a,b) به $(0,1)$ است.

تعداد تمام الگوریتم‌ها شماراست. فرض کنید لیست تمام الگوریتم‌ها را داشته باشیم ...، ؟، ؟، ؟

فرضیه پیوستار

آیا مجموعه‌ای وجود دارد که اندازه آن از اعداد طبیعی اکیداً بیشتر و از اعداد حقیقی اکیداً کمتر باشد؟

سوال

تعداد اعداد گنگ چقدر است؟

اعداد گنگ ∪ اعداد گویا = اعداد حقیقی

ادعا: تعداد اعداد گنگ شمارا نیست. زیرا اجتماع دو مجموعه شمارا، شماراست. بنابراین اگر اعداد گنگ شمارا باشند، آنگاه تعداد اعداد حقیقی شمارا خواهد بود.

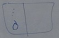
$1\ \ 2\ \ 3\ \ 4 \dots \aleph_0 < 2^{\aleph_0} <$

$\dots < 2^{\left(2^{\aleph_0}\right)} < \dots$

راهنمایی

دقت کنید که هر مجموعه نامتناهی، یک زیرمجموعه شمارا دارد.

X $A \subseteq X$ شمارا



مثال

$[0,1) \cong (0,1)$

تمرین: فرض کنید X یک مجموعه نامتناهی باشد (شمارا یا ناشمارا). نشان دهید که

① $X \cup \{b\} \cong X$

② $X - \{x\} \cong X$

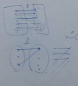
تعداد تمام آدم‌ها متناهی است. در صورتی که لیست تمام آدم‌ها را داشته باشیم ... ۱، ۲، ۳، ۴

یادآوری

$|X| \leq |Y| \Leftrightarrow$ تابعی یک‌به‌یک از X به Y موجود باشد

$|Y| \leq |X| \Leftrightarrow$ تابعی یک‌به‌یک از Y به X موجود باشد

$|X| = |Y| \Leftrightarrow$ تابعی یک‌به‌یک و پوشا از X به Y موجود باشد



سؤال: آیا اگر $\underbrace{|X| \leq |Y|}_{f}$ ، $\underbrace{|Y| \leq |X|}_{g}$ آنگاه $\underbrace{|X| = |Y|}_{h}$ ؟

اثبات

توجه کنید که تعداد زیرمجموعه‌های n عضوی اعداد طبیعی از $|\mathbb{N}^n|$ بیشتر نیست. $|\mathbb{N}^n| = |\mathbb{N}|$

پس تعداد زیرمجموعه‌های متناهی $\mathbb{N}$ شمارا است.

• پیغم: تعداد زیرمجموعه‌های نامتناهی $\mathbb{N}$ ناشمارا است.

سؤال

تعداد زیرمجموعه‌های متناهی اعداد طبیعی چقدر است؟

تعداد زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی = تعداد زیرمجموعه‌های ۰ عضوی +

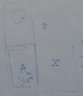
تعداد زیرمجموعه‌های ۱ عضوی + تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی + ...

$= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{N}_i$

شمارا

اجتماع شمارا تا مجموعه شمارا، شمارا است.

+0.25



$Q \cup A \leq A$

$X \cup Q = (X - A) \cup \underbrace{(A \cup Q)}_{A} \equiv X$

لم: فرض کنید X یک مجموعه نامتناهی باشد، طوری که $X \cap Q = \emptyset$

آنگاه $|X \cup Q| = |X|$

اگر لم را ثابت کنیم آنگاه $|\text{اعداد گنگ}| = |\text{اعداد گنگ} \cup \text{اعداد گویا}|$

پس $|\mathbb{R}| = |\text{گنگ}| = |\text{گنگ} \cup \text{اعداد گویا}|$

نتیجه: $|\mathbb{R}| = |\text{گنگ}|$