مجموعه‌ها → متناهی

مجموعه‌ها → نامتناهی → شمارا

نامتناهی → ...

متناهی و نامتناهی

مجموعه X را نامتناهی یا شمارا می‌گوییم اگر

$$X \cong \mathbb{N}$$

$0, 1, 2, \dots, \aleph_0$

لم $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$

اثبات فرض کنید $X \overset{g}{\cong} \mathbb{N}$ ، $♡ \notin X$.

تابع $f: \mathbb{N} \to X \cup \{♡\}$

$0 \mapsto ♡$

$n \mapsto x_{n+1} = g(n+1)$

یک به یک و پوشاست

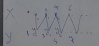
$x_0 \overset{g}{\leftarrow} 0,\ x_1 \overset{g}{\leftarrow} 1,\ x_2 \overset{g}{\leftarrow} 2,\ x_3 \overset{g}{\leftarrow} 3,\ x_4 \overset{g}{\leftarrow} 4$

به طور مشابه ثابت کردیم که

$\aleph_0 + n = \aleph_0$

لم $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

فرض کنید $X \cong \mathbb{N}$ ، $Y \cong \mathbb{N}$ ، $X \cap Y = \emptyset$



تابع $f: \mathbb{N} \to X \cup Y$

$n = 2k \qquad n \mapsto x_k$

$n = 2k+1 \qquad n \mapsto y_k$

یک به یک و پوشاست

لم فرض کنید $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های شمارا باشد

$(X_i \cong \mathbb{N})$ ، $X_i \cap X_j = \emptyset \quad \forall i,j \in \mathbb{N}$

$X_0 \quad x_{00} \quad x_{01} \quad x_{02} \quad x_{03} \quad x_{04} \quad \dots$

$X_1 \quad x_{10} \quad x_{11} \quad x_{12} \quad x_{13} \quad x_{14} \quad \dots$

$X_2 \quad x_{20} \quad x_{21} \quad x_{22} \quad x_{23} \quad x_{24} \quad \dots$

X_3

$\vdots$

توجه $\left|\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i\right| = |\mathbb{N}^2|$

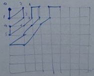
$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(i,j) \mid i,j \in \mathbb{N}\}$

ادعا $\aleph_0 = |\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$

تمرین تابع $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ را با کمک طرح مقابل

ارائه دهید

$n \mapsto (i,j)$



مجموعه‌ها → متناهی
مجموعه‌ها → نامتناهی → شمارا
...

$\aleph_0$ ______
$\aleph_0$ ______
$\aleph_0$ ______
⋮

لم
در تمرین دیدیم ثابت کردیم که $\aleph_0 = \aleph_0 \times \aleph_0$

به بیان دیگر اگر $|X| = \aleph_0$ ، $|Y| = \aleph_0$ آنگاه $|X \times Y| = \aleph_0$.

نتیجه $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$

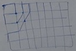
اعداد گویا

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{Z}\}$

$|\mathbb{Q}| = |\{(m,n) \mid m,n \in \mathbb{Z}\}|$

$|\mathbb{Q}| = |\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z} \times \{i\}| = |\mathbb{N}|$

$= \aleph_0$



سطر ۱: 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$

سطر ۲: $(1,1)$ $(1,2)$ $(1,3)$ .....

سطر ۳: $(2,1)$ $(3,3)$ $(3,5)$

سطر ۴: $(3,1)$ $(3,2)$ — $(3,4)$ —

خلاصه

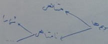
② اجتماع شمارا تا مجموعه شمارا، یک شمارا است.

یادآوری

فرض کنید X، Y دو مجموعه باشند.

$|X| \lneq |Y|$ هرگاه تابع یک‌به‌یک از X به Y موجود باشد

ولی هیچ تابع یک‌به‌یک و پوشایی از X به Y موجود نباشد.



قضیه

فرض کنید X یک مجموعه باشد. آن‌گاه

$$|P(X)| > |X|$$

نتیجه اگر X متناهی باشد و $|X|=n$

تعداد زیرمجموعه‌های X برابر است با 2^n

عضو X

$$\underbrace{\boxed{2}\times\boxed{2}\times\boxed{2}\times\boxed{\ }}_{n\text{ تا}}=2^n$$

$$2^n > n$$

اثبات

فرض کنید X یک مجموعه دلخواه باشد.

ادعا ⊛ هیچ تابع پوشایی از X به $P(X)$ وجود ندارد.

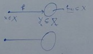
توجه

از X به $P(X)$ تابع یک‌به‌یک موجود است.

$$f: X \to P(X)$$
$$x \mapsto \{x\}$$

اثبات ادعای ⊛

فرض کنید تابع $f: X \to P(X)$ پوشا باشد.



مجموعه $Y\subseteq X$ را به صورت زیر در نظر بگیریم.

$$Y=\{x\in X \mid x\notin f(x)\}$$

زیرمجموعه‌ای از X است

مجموعه‌ها → متناهی

مجموعه‌ها → نامتناهی → شمارا

نامتناهی → ...

واضح است $Y \in P(X)$. از آنجا که تابع f، بنا به فرض، پوشا است

عنصر $x \in X$ موجود است به طوری که $f(x) = Y$

سوال: آیا $x \in f(x)$؟

$$f(x) = Y = \{x \mid x \notin f(x)\}$$

اگر $x \in f(x)$ آنگاه $x \in \{x \mid x \notin f(x)\}$ پس $x \notin f(x)$

اگر $x \notin f(x)$ پس $x \notin \{x \mid x \notin f(x)\}$ پس $x \in f(x)$

پس فرض این که تابع f پوشا است ما را به تناقض بالا رسانده بنابراین فرض غلط است

هیچ تابع پوشا از X به $P(X)$ وجود ندارد

نشان دادیم که $|X| \lneq |P(X)|$

به طور خاص $|N| \lneq |P(N)|$

بنابراین مطمئن هستیم که مجموعه‌ای اکیداً بزرگتر از N وجود دارد

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \aleph,\ \ldots\ldots,\ |P(N)|,\ \ldots$$

سوال: آیا مجموعه‌ای مانند A پیدا می‌شود به طوری که

$$|N| \lneq |A| \lneq |P(N)|$$

(این سوال را فرضیه پیوستار گویند)

تعریف

فرض کنید X یک مجموعه باشد. مجموعه 2^X را به صورت زیر تعریف کنید.

$$2^X = \{ f \mid f: X \to \{0,1\} \text{ تابع باشد} \}$$

$X = \{1,2,3,4\}$

$f: \{1,2,3,4\} \to \{0,1\}$

$1 \mapsto 0$

$2 \mapsto 1$

$3 \mapsto 0$

$4 \mapsto 1$

$X =$	.	.	.	.	.	.
f	0	1	0	1	0	1
g	1	0	1	0	0	0

در واقع هر عضو 2^X در واقع یک دنباله از ۰ و ۱ است که طول آن برابر $|X|$ است.

مجموعه‌ها → متناهی

مجموعه‌ها → نامتناهی → شمارا

نامتناهی → ...

به طور خاص $2^{\mathbb{N}} = \{ f : \mathbb{N} \to \{0,1\} \text{ تابع است} \}$

	0	1	2	3	4	5	6	....
f	0	0	1	0	1	0	1	
g	0	1	0	1	1	0	0	

بنابراین $2^{\mathbb{N}}$ از تمامی دنباله‌های نامتناهی ساخته شده از 0,1

به صورت زیر: $(0,1,0,1,\ldots)$

قضیه

$$|2^X| = |P(X)|$$

اثبات باید یک تابع یک به یک و پوشا از $P(X)$ به 2^X پیدا کنیم.

تابع $g : P(X) \to 2^X$ به صورت زیر تعریف کنید.

$$y \xmapsto{g} g(y)$$

$$g(y) \in 2^X$$

$$g(y) : X \to \{0,1\}$$

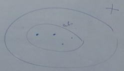
$$y \subseteq X$$

$$y \longmapsto g(y)$$

$$g(y) : X \to \{0,1\}$$

$$\underbrace{g(y)}(x) = \begin{cases} 1 & x \in y \\ 0 & x \notin y \end{cases}$$

نشان دهید تابع g یک به یک و پوشا است.



$H_y : X \to \{0,1\}$

$H_y(x) = 1 \leftrightarrow x \in y$

$H_y(x) = 0 \leftrightarrow x \notin y$

ثابت کردیم که

X تعداد زیرمجموعه‌های $= |P(X)| = |2^X|$

به طور خاص $2^{\aleph_0} = |P(\mathbb{N})|$

گفتیم که $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$.

فرضیه پیوستار: عددی بین $\aleph_0$, $2^{\aleph_0}$ وجود ندارد.