سوال: $\bigcup_{t\in I-J} A_t \overset{?}{=} \bigcup_{i\in I} A_i - \bigcup_{j\in J} A_j$

$\supset$

فرض کنید $x\in \bigcup_{i\in I} A_i - \bigcup_{j\in J} A_j$

آنگاه $x\in \bigcup_{i\in I} A_i$ و $x\notin \bigcup_{j\in J} A_j$

برعکس نیست

اگر $x\in \bigcup_{t\in I-J} A_t$ آنگاه اگر اندیس $t_0\in I-J$ موجود باشد به طوریکه $x\in A_{t_0}$

فرض ها: $x\in \bigcup_{i\in I} A_i$ و $x\notin \bigcup_{j\in J} A_j$

حکم: اندیس $t_0\in I-J$ موجود است به طوریکه $x\in A_{t_0}$

① از اینکه $x\in \bigcup_{i\in I} A_i$ نتیجه می‌گیریم اندیس $i_0\in I$ موجود است بطوریکه $x\in A_{i_0}$

② از اینکه $x\notin \bigcup_{j\in J} A_j$ نتیجه می‌گیریم x در هیچ کدام از A_jها نیست یعنی برای هر $j\in J$ می‌دانیم $x\notin A_j$ نیست

از موارد ① و ② نتیجه می‌گیریم که $i_0\in I-J$ و $x\in A_{i_0}$ در نتیجه $x\in \bigcup_{t\in I-J} A_t$

$\square$ $\bigcup_{i\in I} A_i - \bigcup_{j\in J} A_j \subseteq \bigcup_{t\in I-J} A_t$

ادعا: $\bigcup_{t\in I-J} A_t \not\subseteq \bigcup_{i\in I} A_i - \bigcup_{j\in J} A_j$

$I=\{1,2\}$ $\qquad A_1=\{a,b,c\}$

$J=\{2\}$ $\qquad A_2=\{a,d\}$

$I-J=\{1\}$

$\bigcup_{t\in I-J} A_t = A_1 = \{a,b,c\}$

$\bigcup_{i\in I} A_i = A_1\cup A_2 = \{a,b,c,d\}$

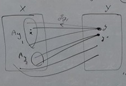
$\bigcup_{j\in J} A_j = A_2 = \{a,d\}$

$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i - \bigcup_{j\in J} A_j = \{b,c\}$

لم: اگر $f:X\to Y$ یک به یک باشد آن‌گاه یک تابع پوشا مانند $g:Y\to X$

وجود دارد. $\left(\forall t\in X \quad \left(g(f(t))=t\right.\right.$ بطوریکه$\left.\right)$

لم: فرض کنید تابع $f:X\to Y$ پوشا باشد.



تعریف پوشا بودن:

$\left(\forall y\in Y \quad \exists x\in X \quad f(x)=y\right)$

آن‌گاه یک تابع یک به یک از Y به X موجود است.

اثبات

هدف: ساختن یک تابع یک به یک از Y به X.

فرض کنید $y\in Y$. مجموعه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$A_y=\{\underbrace{x\in X \mid f(x)=y}\}$$

خانواده‌ی $\{A_y\}_{y\in Y}$ را در نظر بگیرید.

بنا به اصل انتخاب یک تابع $g:Y\to\bigcup_{y\in Y}A_y$ موجود است به طوری که

برای هر $y\in Y$ داریم $g(y)\in A_y$.

از طرفی A_y ها با هم اشتراک ندارند. زیرا اگر $x\in A_{y_2}, x\in A_{y_1}$ آن‌گاه $f(x)=y_1$ و $f(x)=y_2$ که

تابع بودن f را نقض کند.

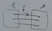
لم

تابع $f : X \to Y$ یک‌به‌یک و پوشا است اگر و تنها اگر یک تابع $g : Y \to X$ موجود باشد به طوری که

$\forall y \in Y \quad f(g(y)) = y$

و

$\forall x \in X \quad g(f(x)) = x$



$g \circ f : X \to X \qquad f \circ g : Y \to Y$

یعنی $g \circ f = Id_X$ و $f \circ g = Id_Y$

$x \mapsto x \qquad y \mapsto y$

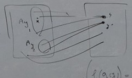
تعریف تابع g را با این ویژگی‌ها وارون f می‌نامیم.

اثبات فرض کنید $f : X \to Y$ یک‌به‌یک و پوشا باشد.

تابع $g : Y \to X$ را به صورت زیر تعریف کنید. برای هر $y \in Y$ که عنصر یکتای $x \in X$ وجود دارد به طوری که $f(x) = y$.

تعریف کنید $g(y) = x$.

لزوم تابع g دارای ویژگی زیر هست:



$f(g(y)) = y$.

اثبات یک‌به‌یک بودن g:

فرض کنید $g(y_1) = g(y_2)$. می‌دانیم که

$g(y_1) \in A_{y_1}$

$g(y_2) \in A_{y_2}$

پس $A_{y_1} \cap A_{y_2} \neq \emptyset$ در نتیجه $y_1 = y_2$.

دوماً g تمام Y را می‌پوشاند (زیرا f پوشاست).

ثانیاً g یک‌به‌یک است.

$$y_1 = y_2 \Rightarrow f(t_1) = f(t_2) \xRightarrow{f \text{ یک‌به‌یک}} t_1 = t_2$$

$y_1 = f(t_1)$، $y_2 = f(t_2)$، $t_1 = g(y_1)$، $t_2 = g(y_2)$

ثالثاً g پوشاست. فرض کنید $x \in X$. آنگاه $x = g(f(x))$.

رابطه $f \circ g = Id_Y$ ، $g \circ f = Id_X$ (به عهده‌ی شما)

اثبات جهت عکس

فرض کنید تابع $g: Y \to X$ با ویژگی‌های یاد شده موجود باشد.

ادعا تابع f یک‌به‌یک است.

فرض کنید $f(t_1) = f(t_2)$. آنگاه از آنجا که g تابع است

$$g(f(t_1)) = g(f(t_2)) \quad \checkmark$$
$$t_1 = t_2$$

ادعا f پوشاست. فرض کنید $y \in Y$. آنگاه $f(g(y)) = y$.

هم‌توانی

دو مجموعه X، Y را هم‌توان می‌نامیم

در تناظر یک‌به‌یک باشند، یعنی یک تابع

یک‌به‌یک و پوشا از X به Y موجود باشد

(معادلاً هرگاه یک تابع یک‌به‌یک و پوشا از Y به X موجود باشد)

نمادگذاری

اگر X، Y هم‌توان باشند می‌نویسیم $X \cong Y$ یا $|X| = |Y|$ یا $Card(X) = Card(Y)$

یا $\#X = \#Y$.

کاردینال

نمادگذاری

اگر یک تابع یک‌به‌یک از X به Y موجود باشد می‌نویسیم $|X| \leq |Y|$.

تعریف.

مجموعهٔ X را متناهی نامیم هرگاه که عدد $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که $|X| = n$. به بیان دیگر $X \cong \underbrace{\{0,1,2,\dots,n-1\}}_{n}$

مثال

$\{$موز، پرتقال، سیب$\}$

$3 = \{0,1,2\}$

تعریف

مجموعهٔ X را نامتناهی می‌نامیم هرگاه که متناهی نباشد.

مثال $\mathbb{N}$ نامتناهی است.

اثبات فرض کنید $n \in \mathbb{N}$. نشان می‌دهیم که $\mathbb{N} \not\cong \{0,1,\dots,n-1\}$.

خلف

فرض کنید تابع $g: \mathbb{N} \to \{0,1,\dots,n-1\}$ یک به یک و پوشا باشد. بنابر اصل لانه کبوتری g نمی‌تواند یک به یک باشد.

مثال

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,\dots\}$

اعداد زوج $= \{0,2,4,6,8,\dots\}$

اعداد زوج $\subseteq \mathbb{N}$

تابع $f: \mathbb{N} \to$ اعداد زوج یک به یک و پوشاست.

$x \mapsto 2x$

بنابراین

$|\mathbb{N}| = |$اعداد زوج$|$

تعریف اگر $X \cong \mathbb{N}$ می‌گوییم $|X| = \aleph_0$

الف $\leftarrow \aleph$

$\aleph$

پس $\aleph_0 = |$اعداد زوج$|$.

همچنین اگر $|X| = \aleph_0$ می‌گوییم X شماراست.

$X = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$

$X = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$

$\cong$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

مثال $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = \aleph_0$.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbb{Z} & 0, & 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, & 4, & -4, & \dots \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & & \dots \\
\mathbb{N} & 0, & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & & &
\end{array}$$

ادعا $\mathbb{N} \cong \mathbb{Z}$

اثبات تابع $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ را بصورت زیر تعریف کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -k & \text{اگر } x = 2k \\ k & \text{اگر } x = 2k-1 \end{cases}$$