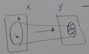
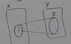
$f(A)=\{f(x) \mid x\in A\}$

$f^{-1}(B)=\{x \mid f(x)\in B\}$

ادامه درس



$y\in f(A) \Leftrightarrow \exists x\in A \;\; f(x)=y$



$x\in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x)\in B$

لم نشان دهید که

$f(f^{-1}(A))=A$

اگر و تنها اگر f پوشا باشد

اثبات قبلاً دیدیم که $f(f^{-1}(A))\subseteq A$.

هدف اثبات این که $A\subseteq f(f^{-1}(A))$.

فرض f پوشاست.

فرض کنید $x\in A$.

هدف اثبات این که $x\in f(f^{-1}(A))$.

برای این که نشان دهیم که $x\in f(\underbrace{f^{-1}(A)}_{B})$ باید $\longleftarrow$

$\left(\underline{x}\in f(B) \Leftrightarrow \exists t\in B \;\; f(t)=x \right)$ یادآوری

نشان دهیم که

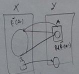
$\exists t\in f^{-1}(A) \quad f(t)=x$

توجه کنید که تابع f پوشاست. پس

$\exists t\in X \quad f(t)=x\in A$

پس $t\in f^{-1}(A)$.

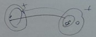
پس t همان عنصری است که می‌خواستیم



تمرین 0.5

نشان دهید که

$$\bigcup_{t\in I-J} A_t=\bigcup_{i\in I} A_i-\bigcup_{j\in J} A_j$$



(با فرض پوشا بودن f)

ب) $B \subseteq f(f^{-1}(B))$

فرض کنید $y \in B$.

از آنجا که f پوشاست عنصر $x \in X$

پیدا می‌شود به طوری که $f(x)=y$

هدف: نشان دادن اینکه $y \in f(f^{-1}(B))$

برای رسیدن به هدف بالا باید نشان دهیم که

عنصر $t \in f^{-1}(B)$ موجود است به طوری که

$f(t)=y$.

قرار دهید $t=x$. آنگاه $f(x)=y$.

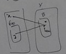
ثانیاً از آنجا که $y \in B$

داریم $x \in f^{-1}(B)$.

سوال: آیا:

$f(x) \in B \Rightarrow x \in f^{-1}(B)$?

بله! $\Rightarrow$

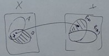


؟

$y \in f(A) \Rightarrow f^{-1}(y) \in A$

مثال: فرض کنید A, B دو مجموعه باشند. بررسی کنید که آیا:

$f(B)-f(A) = f(B-A)$



فرض کنید $y \notin f(A), y \in f(B)$.

از اینکه $y \in f(B)$ نتیجه می‌گیریم که عنصر $x \in B$ موجود است به طوری که $f(x)=y$.

هدف: اثبات اینکه $y \in f(B-A)$. برای این منظور باید $x' \in B-A$ پیدا کنیم به طوری که $f(x')=y$.

نه لزوماً $f(B)-f(A) \neq f(B-A)$.

قضیه نشان دهید که

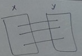
$$f(A-B)=f(A)-f(B)$$

اگر و تنها اگر f یک به یک باشد.

(از آنجا که عکسها تار شده است لطفاً اثبات را در جزوه

قدیم درس - صفحه‌ی ۹۲، تمرین ۲۰۶ - بیابید)

اثبات ⇐ به عهده شما



قضیه

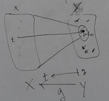
اگر یک تابع یک به یک از X به Y موجود باشد

آنگاه یک تابع پوشا از Y به X وجود دارد.

اثبات تابع $g: Y \to X$ را به صورت زیر تعریف کنید

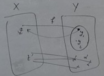
اگر $y \in f(X)$ آنگاه $t \in X$ به صورت یکتا وجود دارد به طوری که $f(t)=y$ قرار دهید $g(y)=t$.

$$f(X)=\{f(t) \mid t\in X\}$$



همچنین اگر $y \in Y - f(X)$

آنگاه تمام اینگونه y ها را به یک عضو $x \in X$ می‌بریم.



ادامه g یک تابع است.

اثبات فرض کنید $y_1 = y_2$.

آنگاه اگر $y_1, y_2 \in f(X)$ آنگاه $t = g(y_1) = g(y_2)$ به طوری که $f(t)=y_1$ از آنجا که f یک به یک است t یکتاست.

اگر $y_1, y_2 \in Y - f(X)$ آنگاه $f(y_1) = f(y_2) = x$.

ادامه g پوشاست. فرض کنید $t \in X$ آنگاه $f(t) \in f(X) \subseteq Y$ پس بنابه تعریف

$t = g(f(t))$.