یادآوری

رابطه f از X به Y را یک تابع می‌نامیم هرگاه

$$\forall x,y \in X \quad (x=y \rightarrow f(x)=f(y))$$

به بیان دیگر

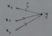
$$\forall x\in X\ \forall y_1,y_2\in Y \left((x,y_1)\in f \wedge (x,y_2)\in f \rightarrow y_1=y_2\right)$$

یادآوری

$$y=f(x) \overset{\text{یعنی}}{\Longleftrightarrow} (x,y)\in f$$

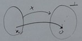
تعریف تابع $f: X\to Y$ را یک‌به‌یک می‌نامیم (Injective)

هرگاه



$$\forall x_1,x_2\in X$$

$$(x_1\neq x_2 \rightarrow f(x_1)\neq f(x_2))$$



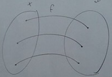
به بیان دیگر

$$\forall x_1,x_2\in X$$

$$(f(x_1)=f(x_2) \rightarrow x_1=x_2)$$

تعریف تابع $f: X\to Y$ را پوشا می‌نامیم هرگاه

$$\forall y\in Y\ \exists x\in X\ f(x)=y$$



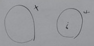
تعریف

تابع $f: X\to Y$ را یک تناظر یک‌به‌یک

می‌نامیم هرگاه یک‌به‌یک و پوشا باشد.

اگر بین X و Y یک تناظر یک‌به‌یک وجود داشته باشد

می‌گوییم X و Y همتوان است و می‌نویسیم $X \approx Y$



$\{$موز، پرتقال، سیب$\}$

f تناظر یک به یک (تغییر نام اعضا)

$\{1, 2, 3\}$

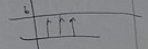
مثال فرض کنید X, Y دو مجموعه باشند و $b \in Y$.

ضابطه‌ی زیر یک تابع است: $f : X \to Y$. تابع ثابت b گوییم

$x \mapsto b$

تابع ثابت می‌نامیم.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



مثال ضابطه‌ی $+ : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$(x,y) \mapsto x+y$

یک تابع است. زیرا

$(x,y) = (x',y') \Rightarrow x+y = x'+y'$

آیا تابع فوق یک به یک است؟ خیر. زیرا

$+(2,5) = +(3,4)$

ولی $(2,5) \neq (3,4)$

آیا تابع فوق پوشاست. زیرا اگر $y \in \mathbb{N}$ آنگاه

$y = y + 0 = +(y,0)$

مثال فرض کنید $B \subseteq X$.

ضابطه‌ی $f : P(X) \to P(X)$

$A \mapsto A \cup B$

یک تابع است.

آیا تابع فوق یک به یک است؟

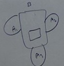
فرض کنید $B \neq \emptyset$. آنگاه B دارای حداقل دو زیرمجموعه است (مثلاً $A_1, A_2 \subseteq B$ $(A_1 \neq A_2)$).

آنگاه $B = A_1 \cup B = A_2 \cup B$. بنابراین تابع داده شده یک به یک نیست.

سوال آیا تابع داده شده پوشاست؟ خیر. اگر $B \neq \emptyset$، $C \subsetneq B$ آنگاه

$\forall A \in P(X) \quad A \cup B \neq C$

$(C \subsetneq A \cup B)$.

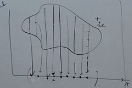


$\alpha \in Y$

$(x, \alpha) \longmapsto x$

به طور مشابه: $\pi_Y : X \times Y \to Y$

$(x,y) \longmapsto y$



دامنه π_X: $X \times Y$

برد: X

اگر $Y \neq \emptyset$ پوشا است.

اگر Y بیش از یک عضو داشته باشد یک به یک نیست.

مثال

فرض کنید X, Y دو مجموعه باشند

ضابطه $\pi_X : X \times Y \longrightarrow X$

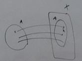
$(x,y) \longmapsto x$

را تابع تصویر روی مولفه اول می‌نامیم.

Projection

مثال $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto x^2 + y^2$



تابع شمول یک به یک است ولی لزوماً پوشا نیست.

مثال

فرض کنید $A \subseteq X$.

تابع $f : A \to X$

$x \longmapsto x$

را تابع شمول می‌نامیم.

inclusion

مثال فرض کنید X یک مجموعه باشد

ضابطه $f : X \to X$ یک تابع است

$x \longmapsto x$

که آن را تابع همانی می‌نامیم و با id_X نمایش می‌دهیم.

$id_X : X \to X$

$x \longmapsto x$

تمرین

نشان دهید که شرایط زیر هم‌ارزند:

الف) تابع f یک به یک است $\Leftrightarrow B = \emptyset$

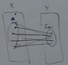
$(B \neq \emptyset)$

ب) تابع f پوشا است $\Leftrightarrow D = \emptyset$.

(دوران ...)

تعریف

فرض کنید $f: X \to Y$ یک تابع باشد و $A \subseteq X$.



تعریف می‌کنیم $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ را تصویر A در Y تحت f

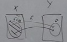
به بیان دیگر

$y \in f(A) \leftrightarrow \exists x \in A$
$y = f(x)$

واضح است که $f(A) \subseteq Y$.

اگر f یک به یک و پوشا باشد آن‌گاه

$A \cong f(A)$



تعریف

اگر $f: X \to Y$ یک تابع باشد و $B \subseteq Y$.

تعریف می‌کنیم

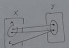
$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$

سوال

فرض کنید $A \subseteq X$ ، $f: X \to Y$ یک تابع باشد.

آیا $f^{-1}(f(A)) \overset{?}{=} A$.

ادعا $f^{-1}(f(A)) \underset{}{\overset{\text{لزوماً}}{\neq}} A$.



دلیل

$f^{-1}(f(A)) = \{x \in X \mid f(x) \in f(A)\}$

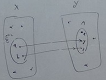
در شکل فوق $f^{-1}(f(A)) \neq A$.

توجه

$\exists x \in A\ t = f(x) \iff t \in \underset{\{f(x) \mid x \in A\}}{f(A)}$

$f^{-1}(f(A)) = \{x \in X \mid f(x) \in f(A)\} = \{x \in X \mid \exists \acute{x} \in A\ f(x) = f(\acute{x})\}$

$$f^{-1}(A) = \{t \in X \mid f(t) \in A\}$$



سوال

؟ $A \subseteq f(f^{-1}(A))$

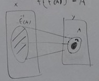
خیر. امکان دارد $f(f^{-1}(A)) \subsetneq A$

لم $f(f^{-1}(A)) \subseteq A$.

اثبات فرض کنید $y \in f(f^{-1}(A))$.

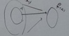
آنگاه عنصر $x \in f^{-1}(A)$ موجود است بطوری که $y = f(x)$.

از آنجا که $x \in f^{-1}(A)$ نتیجه می‌شود که $y = f(x) \in A$.



سوال

آیا $f(f^{-1}(A)) = A$



تذکر

$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$

$\Leftrightarrow \exists z \in B \quad f(x) = y$

لم $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$

اثبات فرض کنید $x \in A$. می‌خواهیم نشان دهیم که $x \in f^{-1}(f(A))$. برای این منظور کافی است نشان دهیم که $f(x) \in f(A)$. بنابه تعریف از $x \in A$ نتیجه می‌شود که $f(x) \in f(A)$.

۲)

$f^{-1}(f(A)) = A$ اگر و تنها اگر f یک تابع یک به یک باشد.

اثبات

در جلسه قبل دیدیم که در حالت کلی $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

حال با فرض یک به یک بودن f نشان می‌دهیم که $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$.

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

فرض کنید $t \in f^{-1}(f(A))$. بنابراین طبق تعریف $f(t) \in f(A)$.

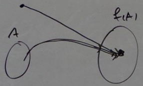
بنابراین عنصر $t' \in A$ وجود دارد که $f(t) = f(t')$

از آنجایی که f یک به یک است:

$$f(t) = f(t')$$

نتیجه می‌گیریم که $t = t' \in A$.

$$u \in f(A) \iff \exists t' \in A \quad u = f(t')$$



$$f(t) \in f(A) \iff \exists t' \in A \quad f(t) = f(t')$$