به نام خدا

کوئیز اول

(۰.۵ نمره)

سوال: فرض کنید R_1 ، R_2 دو رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ X باشند به طوری که $X/R_1 = X/R_2$

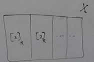
ثابت کنید

$$(x,y)\in R_1 \rightarrow (x,y)\in R_2$$

یادآوری: اگر R یک رابطهٔ هم‌ارزی بین اعضای مجموعهٔ X باشد آنگاه R، مجموعهٔ X را افراز می‌کند؛ یعنی

$$X/R = \{[x]_R \mid x\in X\}$$

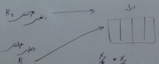
افرازی برای X است.



$A = \{\underbrace{A_1, A_2, \dots}_{X \text{ افرازهای}}\}$ $\quad \cup A = X$ $\quad A_i \cap A_j = \emptyset$

یادآوری: اگر A افرازی برای X باشد آنگاه یک رابطهٔ هم‌ارزی R بین اعضای X وجود دارد به طوری که

$$X/R = A = \{\underset{\substack{\| \\ [x]_R}}{A_1}, A_2, \dots\}$$



$\underbrace{X/R_1 = X/R_2}$

به نام خدا

کوئیز اول (0.5 نمره)

سوال: فرض کنید R_1 ، R_2 دو رابطه هم‌ارزی روی مجموعه X باشند به طوری که $X/R_1 = X/R_2$. ثابت کنید

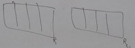
$$(x,y)\in R_1 \to (x,y)\in R_2$$

پاسخ

فرض‌ها: ① R_1 ، R_2 دو رابطه هم‌ارزی هستند روی X.

② $X/R_1 = X/R_2$.

حکم: $(x,y)\in R_1 \to (x,y)\in R_2$



فرض کنید $(x,y)\in R_2$. بنابراین

$x\in[y]_{R_2}\in X/R_1 = X/R_2$.

ادعا می‌کنیم که $[y]_{R_1}=[y]_{R_2}$ بنابراین

$x\in[y]_{R_2}$

بنابراین $(x,y)\in R_2$.

از آنجا که $X/R_1 = X/R_2$ می‌دانیم که $[y]_{R_1}$ حتماً با یکی از کلاس‌های موجود در X/R_2 برابر است.

بنابراین عنصر $t\in X$ موجود است به طوری که

$[y]_{R_1}=[t]_{R_2}$

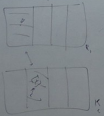
از طرفی می‌دانیم که $y\in[y]_{R_2}$ بنابراین $y\in[t]_{R_2}$ بنابراین yR_2t

بنابراین $[y]_{R_2}=[t]_{R_2}$ پس $[y]_{R_1}=[y]_{R_2}$

حال اگر xR_1y آنگاه $x\in[y]_{R_1}$

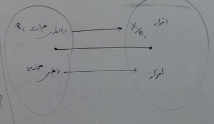
پس $x\in[y]_{R_2}$ پس xR_2y.

$X/R_1=\{[x]_{R_1} \mid x\in X\}$



مجموعه X

تناظر یک به یک



مثال از تناظر یک به یک:

$\{1, 2, 3\}$

{سیب، پرتقال، موز}

$\{\square, \triangle, \bigcirc\}$

$T_1 = \{$ مجموعه تمامی افرازهای موجود برای مجموعه $X \}$

$X = \{1, 2, 3\}$

$T_1 = \{ \{\{1\},\{2,3\}\}, \{\{1,2\},\{3\}\}, \{\{1\},\{2\},\{3\}\}, \{\{1,3\},\{2\}\}, \{\{1,2,3\}\} \}$

$T_2 = \{$ تمامی روابط هم‌ارزی روی $X \}$

$= \{ R \subseteq X \times X \mid$ R انعکاسی، متعدی، متقارن $\}$

$T_1 \longleftrightarrow T_2$

بیان دقیق

تابع $f: T_2 \to T_1$, $R \mapsto X/R$ یک تابع یک به یک و پوشاست.

یک تابع یک به یک و پوشا، یک تناظر یک به یک گفته می‌شود.

به بیان دیگر

$\forall x \in X \quad \forall y_1, y_2 \in Y$

$$\big((x,y_1) \in R \wedge (x,y_2) \in R \rightarrow y_1 = y_2 \big)$$

~~تمرین: نشان دهید که اگر رابطه R ...~~

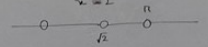
$\forall x \quad \exists y_1, y_2 \in Y \quad \big((x,y_1) \in R \wedge (x,y_2) \in R \rightarrow y_1 = y_2 \big)$

Functions — توابع

فرض کنید $R \subseteq X \times Y$ رابطه‌ای بین دو مجموعه X و Y باشد. می‌گوییم رابطه R یک تابع از X به Y است هرگاه

$$\forall x \in X \quad \exists! y \quad (x,y) \in R$$

$x^2 = 2$



$r_2 < \sqrt{2} < r_1$

شکاف دارد.

$\sqrt{2} < r_1$

$\sqrt{2} < r_3$

$\sqrt{2} < r_4$

ساخت اعداد گویا:

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$(m,n) \; R \; (m',n')$

$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$

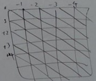
$\Leftrightarrow mn' = nm'$

بررسی کنید که رابطه هم‌ارزی است.

کلاس‌های این رابطه، اعداد گویا هستند.

$(x,y) \; R \; (x',y') \Leftrightarrow$

$x + y' = y + x'$

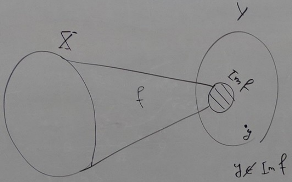


$\mathbb{N}$

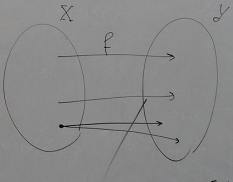
$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$

X مربع



$y \notin \mathrm{Im}\, f$



مجموعه X را دامنه تابع f می‌دانیم.

مجموعه زیر را برد (تصویر) تابع f می‌نامیم.

$$\mathrm{Im}(f) = \{ y \in Y \mid \exists x \in X \ \ f(x) = y \}$$

معمولاً رابطه‌هایی را که تابع هستند با حروف

$f, g, \ldots$ نشان می‌دهیم و به جای

$(x,y) \in f$

می‌نویسیم $f(x) = y$.