از جلسه‌ی بعد کسی بعد از من حق ورود به کلاس نخواهد داشت

تعریف

مجموعه‌ی $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ (مجموعه‌ای متشکل از زیرمجموعه‌های X) را یک افراز برای X می‌نامیم هرگاه،

1. $\forall A,B \in \mathcal{A} \quad A \cap B = \emptyset$
2. $\bigcup \mathcal{A} = X$
3. $\forall A \in \mathcal{A} \quad A \neq \emptyset$

مثال

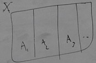
$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

افرازی از X: $\mathcal{A}_1 = \{ \{1,2\}, \{3,4,5\} \}$

$\bigcup \mathcal{A}_1 = \{ x \mid \exists y \in \mathcal{A}_2 \quad x \in y \}$

$= \{1,2\} \cup \{3,4,5\}$

$\mathcal{A}_2 = \{ \{1\}, \{2\}, \{3,4,5\} \}$



$\mathcal{A} = \{ A_1, A_2 \dots \}$

مثال

$X = \mathbb{N}$

توجه: جلسه‌ی آتی کوئیز اول

$\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I} \qquad \bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} A_i$

$\bigcup_{\gamma \in \Delta} A_\gamma = \{ x \mid \exists \gamma \in \Delta \quad x \in A_\gamma \}$

$\bigcup X = \{ x \mid \exists y \in X \quad x \in y \}$

$X = \{A, B, C, \dots\}$

$\bigcup_{i \in I} A_i = \{ x \mid \exists i \in I \quad x \in A_i \}$

$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{ x \mid \exists i \in N \quad x \in A_i \} = \{ x \mid \exists j \in N \quad x \in A_j \} = \{ x \mid \exists \cdot \in \mathbb{N} \; x \in A_{\cdot} \}$

مثال

$X = \mathbb{N}$

$A = \{\{1\}, \{2,3,\ldots\}\}$

$A_2 = \{\{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}, \ldots\}$

$A_3 = \{$ اعداد زوج , اعداد فرد $\}$

یادآوری

در جلسه قبل ثابت کردیم که

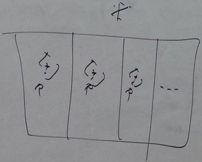
اگر R یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه X

باشد آنگاه

$$A = X/R = \{ \underbrace{[x]_R}_{\{y \mid yRx\}} \mid x \in X \} \Rightarrow$$

بدون تکرار

یک افراز برای X است.



از جلسه‌ی بعد کسی بعد از من حق ورود به کلاس را ندارد

مثال

$X=\mathbb{N}$

$(x,y)\in R \iff$ به‌ترتیبی x و y هر دو زوج یا فرد باشند

$\iff x \overset{2}{\equiv} y$

$X/R=\{[0],[1]\}$

$=\{$اعداد زوج , اعداد فرد$\}$

$[0]\cup[1]=\mathbb{N}$

$23\in[1]$

تذکرات مهم:

- هر رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X، این مجموعه را به قطعه‌ها افراز می‌کند $\longleftarrow$ X/R افرازی از X است.

- $\boxed{\text{هر افرازی از X منجر به یک رابطه‌ی هم‌ارزی ایجاد می‌شود}}$

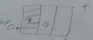
$\mathcal{A}$ افراز

$R \qquad X/R=\mathcal{A}$

قضیه

فرض کنید $\mathcal{A}$ افرازی برای مجموعه‌ی X باشد. آن‌گاه یک رابطه‌ی هم‌ارزی R روی X وجود دارد به‌طوری که

$$X/R=\mathcal{A}$$



$A,B\in\mathcal{A}$

$R_1(x,y)$: x هم‌قد y است

کلاس‌ها $\leftarrow X/R_1=\{$دسته‌های افراد هم‌قد$\}$

$R_2(x,y)$: x هم‌وزن y است

$X/R_2=\{$دسته‌های هم‌وزن$\}$

از جلسه بعد کسی بعد از من حق ورود به کلاس نخواهد داشت ⚠

اثبات

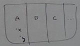
فرض کنید $\mathcal{A}$ افراز موردنظر از X باشد

حدس: پیدا کردن یک رابطه R روی مجموعه X

بطوری که R هم‌ارزی باشد و $X/R = \mathcal{A}$

رابطه R را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$x R y \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{A} \quad x, y \in A$$



باید ثابت کنیم که

اولاً R هم‌ارزی است

ثانیاً $X/R = \mathcal{A}$

اثبات هم‌ارزی بودن رابطه R:

انعکاسی بودن

فرض کنید $x \in X$. از آنجا که $\mathcal{A}$ افرازی برای X است $A \in \mathcal{A}$ موجود است به طوری که $x \in A$.

پس $x \in A$، $x \in A$ پس طبق تعریف رابطه R داریم $x R x$.

تقارنی بودن

فرض کنید $x R y$. آن‌گاه $A \in \mathcal{A}$ موجود است

به طوری که $x, y \in A$ یعنی $y, x \in A$ پس $y R x$.

تعدی فرض کنید $\underbrace{x, y \in A \in \mathcal{A}}_{x R y}$ و $\underbrace{y, z \in A}_{y R z}$ پس $x, z \in A$ یعنی $x R z$.

از جلسهٔ بعد کسی بعد از من حق ورود به کلاس نخواهد داشت

$\{[x] \mid x\in X\}$

اثبات این که $X/R = \mathcal{A}$

فرض کنید $A \in \mathcal{A}$. هدف: اثبات این که $x_0 \in X$ وجود دارد به طوری که $A = [x_0]_R$

فرض کنید x_0 یک عنصر دلخواه از A باشد.

ادعا: $[x_0]_R = A$

$y\in[x_0]_R \Rightarrow yRx_0 \Rightarrow \exists B\in\mathcal{A} \quad y,x_0\in B$

$\Rightarrow x_0,y\in A \Rightarrow y\in A$

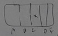
$y\in A \xRightarrow{x_0\in A} (x_0,y)\in R \Rightarrow y\in[x_0]_R$

تا اینجا نشان دادیم که

$\mathcal{A}\subseteq X/R$

قسمت دوم: اثبات این که $X/R \subseteq \mathcal{A}$

فرض کنید $[x_0]_R \in X/R$. هدف: پیدا کردن $A\in\mathcal{A}$ به طوری که $[x_0]_R = A$



$\mathcal{A}=\{A,B,C,D,F\}$

از آنجایی که $\mathcal{A}$ یک افراز است

مجموعهٔ $A\in\mathcal{A}$ وجود دارد به طوری که $x_0\in A$.

ادعا: $[x_0]_R = A$

$y\in[x_0]_R \Rightarrow yRx_0 \Rightarrow y,x_0\in$ (در یک مجموعه) $\xRightarrow{x_0\in A} y\in A$

$y\in A \xRightarrow{x_0\in A} yRx_0 \Rightarrow y\in[x_0]_R$

{سیب، پرتقال} = {پرتقال، سیب}

$X/R_1 = \{[x]_{R_1} \mid x\in X\}$

$X/R_2 = \{[x]_{R_2} \mid x\in X\}$

قضیه

اگر R_1، R_2 دو رابطهٔ هم‌ارزی روی X باشند، آن گاه اگر $X/R_1 = X/R_2$ آن گاه $R_1 = R_2$ (یعنی $xR_1y \Leftrightarrow xR_2y$)

اثبات: فرض کنید $R_1 \neq R_2$. یعنی $x,y\in X$ وجود داشته باشند به طوری که xR_1y و $x \not R_2 y$.

آن گاه $[x]_{R_1} \neq [x]_{R_2}$ (ادامه: تمرین برای شما)