تعریف

فرض کنید R یک رابطه روی مجموعهٔ X باشد ($R \subseteq X \times X$)

می‌گوییم R یک رابطهٔ هم‌ارزی روی X است هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

① R انعکاسی باشد:

$\forall x \in X \quad (x,x) \in R$

② R تقارنی باشد:

$\forall (x,y) \in X \times X \quad (x,y) \in R \to (y,x) \in R$

③ R متعدی باشد:

$\forall x,y,z \in X \quad (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \to (x,z) \in R$

مثال

فرض کنید X = کلاس درس،

$R(x,y) \overset{\text{تعریف}}{\iff}$ x هم‌قد y باشد

آن‌گاه R یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

مثال

روی $\mathbb{N}$ رابطهٔ زیر را تعریف کنید:

$x R y \iff x \overset{3}{\equiv} y \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad k|x-y$

اولاً به ازای هر x عضو $\mathbb{N}$ داریم $x \overset{3}{\equiv} x$ (زیرا $3|x-x$)

ثانیاً اگر $x \overset{3}{\equiv} y$ آن‌گاه $y \overset{3}{\equiv} x$ ($3|y-x \Leftarrow 3|x-y$)

ثالثاً اگر $x \overset{3}{\equiv} y$ و $y \overset{3}{\equiv} z$ آن‌گاه $x \overset{3}{\equiv} z$ ($3|x-y+y-z=x-z \Leftarrow 3|y-z \ , \ 3|x-y$)

توجه

رابطهٔ فوق را روی $\mathbb{Z}$ هم می‌توان به طور کلی تعریف کرد: $\overset{n}{\equiv}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

مثال

روی $\mathbb{N}^2$ رابطهٔ زیر را در نظر بگیرید

(تعریف)

$(x,y)\ R\ (x',y') \Leftrightarrow x+y' = x'+y$

نشان دهید که رابطهٔ فوق هم‌ارزی است.

پاسخ

اثبات انعکاسی بودن

فرض کنید $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ داریم

$x+y = x+y$

پس $(x,y)\ R\ (x,y)$ (طبق تعریف)

اثبات تقارنی بودن

فرض کنید $(x,y)\ R\ (x',y')$ آنگاه

$x+y' = y+x'$ پس $(x',y')\ R\ (x,y)$

$(x_0,y_0)\ R\ (x_0,y_0)$

اثبات متعدی بودن R ثابت می‌شود.

(تمرین)

$$\boxed{\begin{array}{c}(x,y) \in \mathbb{N}^2 \\ (x,y)\ R\ (x',y') \Leftrightarrow \\ x-y = x'-y'\end{array}}$$

مثال

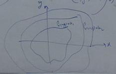
فرض کنید $z = f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد. روی $\mathbb{R}^2$

تعریف کنید

$(x,y)\ R\ (x',y') \Leftrightarrow$

$f(x,y) = f(x',y')$

به بیان دیگر (x,y) با (x',y') در رابطه است که هر دو روی یک منحنی تراز واقع شوند.



بررسی این که رابطه فوق هم ارزی است به عهده شما.

تعریف فرض کنید R یک رابطه هم ارزی روی X باشد و $x\in X$. تعریف می کنیم

$$[x]_R = \{y\in X \mid xRy\} = \{y \mid yRx\}$$

لم $[x]_R \subseteq X$

لم برای هر X $x\in$ داریم

$$x\in [x]_R$$

اثبات زیرا بنا به انعکاسی بودن رابطه هم ارزی داریم xRx.

لم برای هر $x,y\in X$ دو حالت داریم:

یا $[x]_R\cap[y]_R=\emptyset$ یا $[x]_R=[y]_R$.

اثبات

فرض کنید $[x]_R\cap[y]_R\neq\emptyset$.

هدف اثبات این که

$$[x]_R=[y]_R$$

فرض کنید $t\in[x]_R\cap[y]_R$. بنابراین $(x,t)\in R$, $(t,y)\in R$.

بنا به تعدی، $(x,y)\in R$.

حال فرض کنید $t'\in[x]_R$ آن گاه $(t',x)\in R$ پس از $(x,y)\in R$ و تعدی نتیجه می گیریم که $t'Ry$

یعنی $t'\in[y]_R$. پس $[x]_R\subseteq[y]_R$

مشابهاً ثابت کنید که $[y]_R\subseteq[x]_R$ و از این رو $[y]_R=[x]_R$

در واقع ثابت کردیم که موارد زیر با هم معادلند:

① $[x]_R = [y]_R$

② $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$

③ xRy

نتیجتاً:

$$x \not R y \Leftrightarrow [x]_R \cap [y]_R = \emptyset$$

$$xRy \Leftrightarrow [x] = [y] \Leftrightarrow [x] \cap [y] \neq \emptyset$$

لم

$$[x] \cap [y] \neq \emptyset \Leftrightarrow (x,y) \in R$$

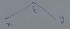
اثبات

$\Leftarrow$ اگر xRy آنگاه $x \in [x]$, $x \in [y]$

پس $x \in [x] \cap [y]$ یعنی $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.

$\Rightarrow$ اگر $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ آنگاه عضو $t \in X$ وجود دارد

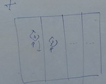
بطوری که $x \xrightarrow{R} t \xrightarrow{R} y$ پس xRy



$$[x] \cap [y] \neq \emptyset \Leftrightarrow xRy$$

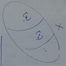
$$\Downarrow$$

$$[x] \cap [y] = \emptyset \Leftrightarrow x \not R y$$



بیان دیگر

هر $x \in X$ حتماً در یک کلاس هم‌ارزی واقع می‌شود.



$$\bigcup X/R = \bigcup_{x\in X} [x]_R = X$$

توجه

اثبات

$\subseteq$ واضح است زیرا برای هر [illegible] داریم $[x] \subseteq X$.

$\supseteq$: فرض کنید $x \in X$. آن‌گاه $x \in [x]_R$ پس $x \in \bigcup_{x\in X} [x]_R$

تعریف

فرض کنید R یک رابطه هم‌ارزی روی X باشد

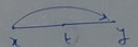
$$\boxed{X/R} := \underbrace{\{ [x]_R \mid x \in X \}}_{\text{به عنوان مجموعه (تکرار را نادیده می‌گیریم)}}$$

مجموعه افراز مجموعه X

لم

$x \not R y \Leftrightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$

اگر $x \not R y$ آن‌گاه اگر $[x]\cap[y] \neq \emptyset$ آن‌گاه عضوی مانند t [illegible]

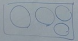


برعکس اگر $x R y$ نشان [illegible] $[x]\cap[y] = [x]$ [illegible]

- Das Leben der anderen

the life of the others.

$\mathcal{A} = \{\ \}$



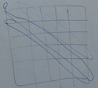
تعریف

فرض کنید $\mathcal{A} \subseteq P(X)$. می‌گوییم $\mathcal{A}$ یک افراز برای X است هرگاه

① $\bigcup \mathcal{A} = X$

② برای هر $A \in \mathcal{A}$ داشته باشیم $A \neq \emptyset$.

③ برای هر $A, B \in \mathcal{A}$ داشته باشیم $A \cap B = \emptyset$.



به اندازه‌ی تعداد قطرها، کلاس مختلف وجود دارد

$$\mathbb{N}^2/R \cong \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$$

$\{(x,y) \mid x-y=0\} = \{(0,0), (1,1), (2,2), \dots\}$

$\{(x,y) \mid x-y=1\} = \{(1,0), (2,1), (3,2), \dots\}$

در واقع رابطه هم‌ارزی بالا از ساختن $\mathbb{Z}$ از روی $\mathbb{N}^2$ استفاده شود.

مثال

رابطه

$(x,y)\ R\ (x',y') \Leftrightarrow x+y' = y+x'$

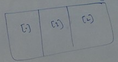
روی $\mathbb{N}^2$ در نظر بگیرید. مثال ۱ است.

$$\mathbb{N}^2/R = \{ [(x,y)]_R \mid (x,y) \in \mathbb{N}^2 \}$$

$[(x,y)] = [(x',y')] \Leftrightarrow$

$x-y = x'-y'$

$\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/\equiv_3$



مثال

$\mathbb{Z}/\equiv_3$ را مشخص کنید.

$$\mathbb{Z}/\equiv_3 = \{ [x]_{\equiv_3} \mid x \in \mathbb{Z} \}$$

توجه کنید که برای هر $x \in \mathbb{Z}$ داریم $x \overset{3}{\equiv} 0$ یا $x \overset{3}{\equiv} 1$ یا $x \overset{3}{\equiv} 2$.

پس

$$\mathbb{Z}/\equiv_3 = \{ [0]_{\equiv_3}, [1]_{\equiv_3}, [2]_{\equiv_3} \}$$

تمرین

فرض کنید A یک امراه برای X باشد.

نشان دهید که یک رابطه همارزی R روی X موجود است بطوریکه

$$X/R = A$$