خانواده‌ای از مجموعه‌ها

فرض کنید Γ یک مجموعه باشد.

عبارت $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$

را یک خانواده‌ی اندیس‌دار از مجموعه‌ها می‌نامند. فرض کنید که

هر A_γ یک مجموعه است.

دلیل استفاده از واژه‌ی خانواده.

شاید در خانواده‌ی مورد نظر تکرار وجود داشته باشد.

$A=\{A_1, A_2\}$

$A_1=A_2$

مثال اگر $A_n=\{0,1\}$

آنگاه $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

یک خانواده از مجموعه‌هاست.

تعریف

اگر $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ یک خانواده از مجموعه‌ها

باشد تعریف می‌کنیم:

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x \mid \exists \gamma\in\Gamma \quad x\in A_\gamma\}$$

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x \mid \forall \gamma\in\Gamma \quad x\in A_\gamma\}$$

مثال

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(0,\tfrac{1}{n}\right) = \varnothing$$

$$= (0,1)\cap\left(0,\tfrac{1}{2}\right)\cap\left(0,\tfrac{1}{3}\right)\cap\ldots =$$

$$\left(0,\tfrac{1}{n}\right) \subseteq \mathbb{R}$$

اگر $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(0,\frac{1}{n}\right)$ آنگاه به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم $x\in\left(0,\frac{1}{n}\right)$ یعنی به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم $0<x<\frac{1}{n}$

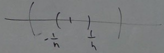
در این صورت به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم $n<\frac{1}{x}$ و این ویژگی ارشمیدسی را نقض می‌کند.

مثال

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right) = (0, 1)$$

مثال

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$$



اثبات

اولاً برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم $0 \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

پس $0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$.

فرض کنید $x \neq 0$ و $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. اگر $x>0$ آن‌گاه $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right)$ که بنا به مثال قبل ناممکن است.

و اگر $x<0$ آن‌گاه $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, 0\right)$ و از این رو $0 \neq -x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right)$ و دوباره بنا به ویژگی ارشمیدسی ناممکن است.

تمرین

$$\bigcap_{\substack{r>0 \\ r\in\mathbb{Q}}} [0,r)$$

$$\bigcap_{\substack{r\in\mathbb{Q} \\ r>0}} (0,r)$$

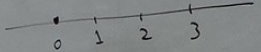
مثال

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [0,\tfrac{1}{n}) = \{0\}$$

ثابت کنید

مثال

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (k,k+1) = \mathbb{R}^{\geq 0} - \mathbb{N}$$

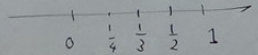


اثبات: نشان می‌دهیم $\mathbb{R}-\mathbb{N} \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (k,k+1)$

اگر $x\in\mathbb{R}^{\geq 0}-\mathbb{N}$ آنگاه $\lfloor x\rfloor\in\mathbb{N}$ ،

$\lfloor x\rfloor < x < \lfloor x\rfloor+1$. قرار دهید $k=\lfloor x\rfloor$ آنگاه $x\in(k,k+1)$ ، $x\in\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(k,k+1)$

$\lfloor x\rfloor \downarrow \in\mathbb{N}$



مثال

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (k, k+1] = (0, \infty)$$

$B\cap(A_1\cup A_2) = (B\cap A_1)\cup(B\cap A_2)$

قضیه

فرض کنید B یک مجموعه و $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد.

آنگاه

① $B\cap \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} (B\cap A_\gamma)$.

② $B\cup \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} (B\cup A_\gamma)$

$a, b, c, \dots$

$\alpha, \beta, \gamma, \dots$

$\aleph, \beth, \dots$

اثبات 1. فرض کنید $x\in B\cap \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$.

آنگاه $x\in B$ و $x\in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$.

یعنی $x\in B$ و یعنی $\gamma\in\Gamma$ وجود دارد بطوری که $x\in A_\gamma$.

یعنی $x\in B\cap A_\gamma$ (برای یک γ). بنابراین

$x\in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} (B\cap A_\gamma)$.

$(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$

① $\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)^c =$ حل

$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$

② $\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)^c = \left(\bigcup A_\gamma\right)^c$

توجه نمی‌توان نوشت

$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = A_{\gamma_0}\cup A_{\gamma_1}\cup\ldots$

حال فرض کنید $x\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(B\cap A_\gamma)$

طبق تعریف اجتماع خانواده‌ها

$x\in B\cap A_{\gamma_0}$ (برای یک اندیس $\gamma_0\in\Gamma$)

بنابراین $x\in B$, $x\in A_{\gamma_0}$

بنابراین $x\in B$, $x\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$

پس $x\in B\cap\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$.

$x\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \Leftrightarrow$

$\exists u\in\Gamma \quad x\in A_u$

اثبات اول

فرض کنید که $x \in \left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)^c$. بنابه تعریف متمم یک مجموعه $x \notin \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$

$$x \in \bigcup A_\gamma \Leftrightarrow \exists \gamma\in\Gamma \quad x \in A_\gamma$$

توجه

$$x \notin \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \Leftrightarrow \forall \gamma\in\Gamma \quad x \notin A_\gamma$$

بنابراین

$$\forall \gamma\in\Gamma \quad x \notin A_\gamma$$

بنابراین

$$\forall \gamma\in\Gamma \quad x \in A_\gamma^c$$

پس $x \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$

از طرف دیگر اگر $x \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$

آنگاه $\forall \gamma\in\Gamma \quad x \in A_\gamma^c$

$(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$

پس $\forall \gamma\in\Gamma \quad x \notin A_\gamma$

پس $x \notin \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$. پس $x \in \left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)^c$

توجه

برای اثبات اینکه برای هر $n\in\mathbb{N}$

$$A\cap(B_1\cup B_2\cup\dots\cup B_n)=(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup\dots\cup(A\cap B_n)$$

از استقرا روی $n\in\mathbb{N}$ استفاده می‌کنیم.

اثبات

اگر $n=1$ آنگاه

$$A\cap B_1=A\cap B_1 \quad \checkmark$$

اگر حکم برای n درست باشد یعنی

$$A\cap(B_1\cup\dots\cup B_n)=(A\cap B_1)\cup\dots\cup(A\cap B_n)$$

آنگاه

$$A\cap(\boxed{B_1\cup\dots\cup B_n}\cup B_{n+1})=\underbrace{A\cap(B_1\cup\dots\cup B_n)}_{\text{چرا؟}}\cup(A\cap B_{n+1})$$

$$\overset{\text{بنا بر فرض استقرا}}{=}(A\cap B_1)\cup\dots\cup(A\cap B_n)\cup(A\cap B_{n+1})$$

پس

$$A\cap(B_1\cup\dots\cup B_{n+1})=(A\cap B_1)\cup\dots\cup(A\cap B_{n+1})$$

اما برای اثبات حکم زیر نمی‌توان از استقرا استفاده کرد

$$A\cap\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n\right)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A\cap B_n$$

$$A\cap(B_0\cup B_1\cup\dots)=(A\cap B_0)\cup(A\cap B_1)\cup\dots$$

توجه: با استقرا ثابت کردیم که برای هر $n\in\mathbb{N}$:

$$A\cap(B_0\cup\dots\cup B_n)=(A\cap B_0)\cup\dots\cup(A\cap B_n)$$

استقراء

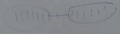
اگر $P(0)$ درست باشد و از درستی

$P(n)$ درستی $P(n+1)$ نتیجه شود

آنگاه $\forall n \in \mathbb{N} \; P(n)$

$P(n)$:

$$A \cap (B_1 \cup \dots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$$



تمرین

فرض کنید $\{A_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از

مجموعه‌ها باشد و هم چنین $\{J_k\}_{k \in K}$

خانواده‌ای دیگر باشد به طوری که

$$\bigcup_{k \in K} J_k = I$$

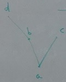
نشان دهید که

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{k \in K} \bigcup_{j \in J_k} A_j$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{k \in K} \bigcap_{j \in J_k} A_j ,$$

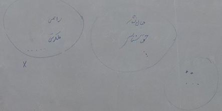
مثال از رابطهٔ جزئی (غیرتام)

$\{(a,a), (a,b), (a,c), (b,c), (b,b), (c,c)\}$



$R = \{(a,a), (a,b), (b,d), (a,d), (a,c), (c,c), (b,b), (d,d)\}$

رابطه‌های هم‌ارزی



تعریف

رابطهٔ R روی مجموعهٔ X یک رابطهٔ هم‌ارزی می‌نامیم هرگاه

① انعکاسی باشد: $\forall x \in X \quad xRx$

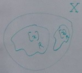
② تقارنی باشد $\forall x,y \in X \quad xRy \to yRx$

③ متعدی باشد $\forall x,y,z \in X \quad xRy \wedge yRz \to xRz$

فرض کنید R یک رابطهٔ هم‌ارزی روی X باشد، $x \in X$. تعریف می‌کنیم

$$[x]_R = \{y \mid R(x,y)\} = \{y \mid R(y,x)\}$$

(کلاس عنصر x تحت رابطهٔ R)



قضیه

① $[x]_R = [y]_R \Leftrightarrow R(x,y)$

② یا $[x]_R = [y]_R$ یا $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$