روابط

منظور از یک رابطه R روی مجموعهٔ X زیرمجموعه‌ای از $X \times X$ است.

$R = \{(x,y) \mid \dots\}$

$R \subseteq$

مثال از رابطه

- فرض کنید X یک مجموعه باشد.

$\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$

یک رابطه روی X است. (رابطهٔ تساوی)

- اگر R یک رابطه روی X باشد آنگاه

$R^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$

نیز یک رابطه روی X است.

- **مثال** روی $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$

رابطهٔ ترتیب به صورت زیر است.

$R = \leq_{\mathbb{N}} = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{N},\ x \leq y\}$

$(x,y) \in R \Leftrightarrow xRy$

$(x,y) \in \leq_{\mathbb{N}} \Leftrightarrow x \leq y$

تعریف

رابطهٔ R روی مجموعهٔ X دارای ویژگی انعکاسی است (Reflexive) هرگاه

$\forall x \in X \quad (x,x) \in R$

$\left(\forall x \in X \quad xRx \quad \text{به بیان دیگر}\right)$

$R \subseteq X \times X$

سوال

فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد

آیا رابطه تعلق روی X بازتابی است؟

$$\in_X = \{(x,y) \mid x,y\in X,\ x\in y\}$$

سوال

آیا $x\in x$ ؟

$x\in x\in x\in x \ldots\ldots$

در تعریف مجموعه‌ها هیچ مجموعه‌ای عضو خودش نیست.

مثال

رابطه شمول را در نظر بگیرید روی $P(X)$

$$\subseteq_{P(X)} = \{(x,y) \mid x,y\in P(X),\ x\subseteq y\}$$

سوال آیا رابطه شمول انعکاسی است؟ بله. زیرا

$\forall x\ (x\subseteq x)$ ✓

سوال $(\leq)$

آیا رابطه ترتیب روی $\mathbb{N}$ انعکاسی است؟ بله

$\forall x\in\mathbb{N}\quad x\leq x$

مثال

رابطه پدری در جامعه انسانی غیر انعکاسی است.

مشاهده

رابطه R روی مجموعه X انعکاسی است اگر و تنها اگر

$$\Delta_X \subseteq R$$

$\Delta_X = \{(x,x) \mid x\in X\}$

اثبات

فرض کنید $\underset{X}{\Delta} \subseteq R$

آنگاه برای هر $x \in X$ داریم

$(x,x) \in \underset{X}{\Delta} \subseteq R$

در نتیجه $(x,x) \in R$، یعنی R انعکاسی است.

فرض کنید R انعکاسی باشد

آنگاه برای هر $x \in X$

داریم $(x,x) \in R$.

پس اگر $(x,x) \in \underset{X}{\Delta}$ عنصر دلخواهی باشد

آنگاه $(x,x) \in R$؛ یعنی $\underset{X}{\Delta} \subseteq R$.

قضیه

اثبات

تعریف

رابطهٔ R روی مجموعهٔ X را تقارنی (Symmetric)

می‌نامیم هرگاه

$$\forall (x,y) \left((x,y) \in R \to (y,x) \in R \right)$$

به بیان دیگر

$$xRy \to yRx$$

مثال

رابطهٔ تساوی روی مجموعهٔ X

$$x = y \to y = x$$

مثال

رابطهٔ برادری

x برادر y است $\leftarrow$ y برادر x است

سؤال

آیا رابطهٔ $\in$ تقارنی است؟

- خیر. زیرا اگر $x \in y$ ، $y \in x$

آن گاه دنباله‌ی زیر ایجاد می‌شود

$x \in y \in x \in x \in y \ldots$

که در ZFC غیرممکن است.

مثال

رابطهٔ $\leq$ روی $\mathbb{N}$ تقارنی نیست.

$1 \leq 2 \wedge \neg(2 \leq 1)$

مثال

رابطهٔ شمول نیز غیرتقارنی است.

$\{1,2\} \subseteq \{1,2,3\}$

$\{1,2,3\} \not\subseteq \{1,2\}$

لم

رابطهٔ R روی مجموعهٔ X

تقارنی است اگر و تنها اگر

$R = R^{-1}$

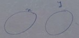
اثبات.

$(x,y) \in R \Leftrightarrow (y,x) \in R \Leftrightarrow (x,y) \in R^{-1}$

مثال

رابطهٔ مجزا بودن دو مجموعه روی $P(X)$

$xRy \overset{\text{تعریف}}{\longleftrightarrow} x \cap y = \emptyset$



تقارنی است

مثال

رابطهٔ عدم تساوی

$xRy \Leftrightarrow x \neq y$

تقارنی است.

تعریف

رابطهٔ R روی مجموعهٔ X را متعدی (ترایایی، تراگذری) می‌نامیم هرگاه

transitive

$$\forall x,y,z \in X \quad (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$$

یعنی اگر $(x,y) \in R$ و $(y,z) \in R$ آن‌گاه $(x,z) \in R$

مثالی از رابطهٔ غیرترایایی روی $\mathbb{N}$

$$\{(1,2),(2,3)\}$$

مثال

رابطهٔ $\leq$ روی $\mathbb{N}$ ترایایی است

$$x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z$$

رابطهٔ $<$ روی $\mathbb{N}$

غیرانعکاسی

غیرتقارنی

ترایایی

مثال

آیا رابطهٔ $\in$ ترایایی است؟ لزوماً نه، زیرا:

$x \in y$

$y \in z$

$y = \{x\}$

$z = \{t, \{x\}\}$

ولی

$x \notin z$

مثال

رابطهٔ شمول

آیا ترایایی است؟ بله.

$$x \subseteq y \wedge y \subseteq z \rightarrow x \subseteq z$$

یادآوری

اگر R و S دو رابطه روی X باشند

$$R\circ S=\{(x,y)\mid \exists t\in X\ \ (x,t)\in S\wedge(t,y)\in R\}$$

$$x \xrightarrow{S} t \xrightarrow{R} y$$

لم

رابطهٔ R روی X متعدی است

اگر و تنها اگر

$$R\circ R\subseteq R$$

اثبات

اگر R متعدی باشد و $(x,y)\in R\circ R$

نشان می‌دهیم که $(x,y)\in R$.

از اینکه $(x,y)\in R\circ R$،

$$R\circ R=\{(x,y)\mid \exists t\in X\ \ (x,t)\in R\wedge(t,y)\in R\}$$

$$x \longrightarrow t \longrightarrow y$$

نتیجه می‌گیریم که $t\in X$ وجود دارد به طوری که

$(x,t)\in R\wedge(t,y)\in R$ (*)

با توجه به (*) و اینکه R یک رابطهٔ متعدی است نتیجه می‌گیریم که

$(x,y)\in R$.

حال با فرض اینکه $R\circ R\subseteq R$ نشان می‌دهیم که

R یک رابطهٔ متعدی است.

برای این منظور فرض کنید $(x,t)\in R$ و $(t,y)\in R$

آنگاه $(x,y)\in R\circ R$

از طرفی $R\circ R\subseteq R$ پس $(x,y)\in R$

تعریف

رابطهٔ R روی مجموعهٔ X را یک رابطهٔ تام می‌نامیم هرگاه

$$\forall x,y\in X\quad (x,y)\in R\vee(y,x)\in R$$

(رابطه‌ای را که تام نباشد یک رابطهٔ جزئی می‌نامیم).

مثال رابطهٔ $\leq$ روی $\mathbb{N}$ تام است.

$$\forall x,y\in\mathbb{N}\ \ (x\leq y\vee y\leq x)$$

سوال

آیا $<_{\mathbb{N}}$ روی $\mathbb{N}$ یک رابطه‌ی تام است؟

خیر، زیرا $(1,1)\notin <_{\mathbb{N}}$ اما $1\in\mathbb{N}$

مثال ترتیب جزئی

روی مجموعه‌ی

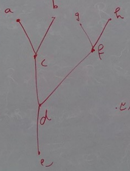
$\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$

ترتیب جزئی روبه‌رو را در نظر بگیرید.

برای مثال

$c\le a, c\le b,$

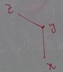
$f\le g, f\le h, d\le a, \dots$



سوال آیا رابطه‌ی فوق تام است؟

خیر، زیرا مثلاً a,b قابل مقایسه نیستند.

همچنین b,g نیز قابل مقایسه نیستند.



$$R \subseteq X \times X$$

تام

رابطهٔ R روی مجموعهٔ X تام است اگر و تنها اگر

$$R \cup R^{-1} = X \times X$$

اثبات: تمرین

$\forall x,y \in X \quad (x,y) \in R \vee (y,x) \in R$

یعنی اگر $(x,y) \notin R$ آنگاه $(y,x) \in R$.

سوال:

آیا از تام بودن R نتیجه می‌شود که

$R = R^{-1}$?

روی مجموعهٔ $\{1,2,3\}$ یک رابطه مثال بزنید که تام باشد ولی $R \neq R^{-1}$:

$$R = \{(1,2),(2,3),(1,3)\}$$

$$R \neq R^{-1}$$