در جلسهٔ قبل دربارهٔ لزوم **اصل‌بندی** نظریهٔ مجموعه‌ها صحبت کردیم. گفتیم که عدم اصل‌بندی مجموعه‌ها و تکیه بر تعاریف مقدماتی برای مجموعه‌ها منجر به بروز پارادوکس‌هایی مانند پارادوکس راسل می‌شود.

در روش اصل موضوعه‌ای در واقع می‌گوییم جهان مجموعه‌ها جهانی است که اصول نظریهٔ مجموعه‌ها در آن درست هستند.

توجه: اصول نظریهٔ مجموعه‌ها (ZFC) جمله‌هایی مرتبهٔ اول هستند که در زبان $\mathcal{L}=\{\in\}$ نوشته می‌شوند.

مجموعه دقیقاً چیزی است که وجودش (مجموعه بودنش) از اصول نظریهٔ مجموعه‌ها نتیجه شود. (در طول درس معنای این جمله روشن‌تر خواهد شد.)

توجه: عناصر جهان نظریهٔ مجموعه‌ها، مجموعه هستند.

ZFC

اصول زرملو و فرانکل و اصل انتخاب:

اصل اول (اصل گسترش)

بیان غیررسمی: دو مجموعه که دارای اعضا (مجموعه‌ها)ی یکسان هستند در واقع یک مجموعه واحد هستند.

بیان رسمی:

$$\forall A,B\ \left(\forall x\ (x\in A\leftrightarrow x\in B)\to A=B\right)$$

بیان دیگر:

$$\forall A,B\ \left(A\subseteq B\wedge B\subseteq A\to A=B\right)$$

یادآوری:

$$A\subseteq B \iff \forall x\ (x\in A\to x\in B)$$

اصل دوم — اصل وجود مجموعه تهی

به زبان صوری — مجموعه تهی وجود دارد.

$$\exists x \quad \forall y \quad \neg(y \in x)$$

از این به بعد مجموعه x در بالا را با $\emptyset$ نشان می‌دهیم.

$$\forall y \quad \neg(y \in \emptyset)$$

Pairing axiom

اصل سوم — اصل جفت‌سازی

اگر x، y دو مجموعه باشند $A=\{x,y\}$ یک مجموعه است.

به زبان دقیق:

$$\forall x,y \quad \exists A \quad \left(\forall z \quad z\in A \leftrightarrow (z=x)\vee(z=y)\right)$$

نتیجه

$$\{x,x\}=\{x\}$$

اثبات

اگر $y\in\{x,x\}$ آنگاه

$$(y=x)\vee(y=x)$$

و بنا به منطق گزاره‌ها

$$p\vee p\rightarrow p$$

داریم $(y=x)\vee(y=x)\rightarrow y=x$

پس اگر $y\in\{x,x\}$ آنگاه $y=x$.

ZFC

به طور مشابه از $y\in\{x\}$ نتیجه بگیرید که $y\in\{x,x\}$.

حال بنا به اصل گسترش

$$\{x,x\}=\{x\}.$$

توجه

بنا به اصل وجود $\emptyset$ یک مجموعه است.

بنا به اصل جفت‌سازی $\{\emptyset,\emptyset\}$ نیز یک مجموعه است.

بنا به اصل گسترش

$$\{\emptyset,\emptyset\}=\{\emptyset\}$$

بنا به گسترش

$$\{\emptyset\}\neq\emptyset$$

خلاصه مجموعه‌های زیر را داریم:

$$\emptyset$$

$$\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$$

$$\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$$

$$\vdots$$

اصل چهارم   اصل تصریح

توجه: در نظریهٔ مجموعه‌های کانتور هر عبارت به صورت

$A = \{x \mid p(x)\}$

یک مجموعه بود.

اصل تصریح تعریف بالا را محدودتر می‌کند.

بیان غیررسمی: اگر بدانیم یا اثبات کرده باشیم که y یک مجموعه است آن‌گاه

$A = \{x \in y \mid p(x)\}$

یک مجموعه است.

یک گزارهٔ مرتبهٔ اول دربارهٔ x

صورت دقیق اصل تصریح

$$\forall y \ \exists z \ \big(\forall t \ (t \in z \leftrightarrow t \in y \wedge p(t))\big)$$

$$\Downarrow$$

$$z = \{t \in y \mid p(t)\}$$

ZFC

نتیجه

فرض کنید x, y دو مجموعه باشند.

عبارت زیر یک مجموعه است (بنا به تصریح)

$\{z \in x \mid z \in y\}$

مجموعهٔ بالا را (که می‌دانیم مجموعه است) با

$x \cap y$

نشان می‌دهیم. به بیان دیگر ثابت کردیم که اگر x, y دو مجموعه باشند $x \cap y$ مجموعه است.

مثال: اگر x, y دو مجموعه باشند عبارت

$\{z \in x \mid z \notin y\}$

نیز یک مجموعه است که آن را با $x - y$ نشان می‌دهیم.

ZFC

$x \in \bigcup C \leftrightarrow \exists y \in C \ \ x \in y$

اصل پنجم — اصل اجتماع

غیر رسمی: اگر x یک مجموعه باشد آن گاه $\bigcup x$ یک مجموعه است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\bigcup x = \{ y \mid \exists z \in x \ \ y \in z \}$$

$$y \in \bigcup x \leftrightarrow \exists z \in x \ \ y \in z$$

$$x = \{ \underbrace{\{1,2\}}_{3 \in t \in x}, \{3,4\}, \{5\} \}$$

$$\bigcup x = \{1,2,3,4,5\}$$

بیان دقیق

$$\forall x \ \exists z \ (\forall y \ \ y \in \overset{\bigcup x}{\overset{\shortparallel}{z}} \leftrightarrow \exists t (t \in x \wedge y \in t))$$

پس گفتیم z را در بالا نوشتیم

$$\forall x \ \exists z \ \ z = \bigcup x$$

قضیه

فرض کنید A، B دو مجموعه باشند. نشان دهید که $A \cup B$ یک مجموعه است.

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$$

اثبات

از آنجا که A، B مجموعه هستند بنا به اصل جفت‌سازی $C = \{A, B\}$ یک مجموعه است. بنا به اصل اجتماع $\bigcup C$ نیز یک مجموعه است.

ادعا

$$A \cup B = \bigcup C$$

ادعای اول

$$\bigcup C \subseteq A \cup B$$

فرض کنید $x \in \bigcup C$ بنابراین $y \in C$ موجود است به طوری که $x \in y$. از آنجا که $y \in C$ پس $y = A$ یا $y = B$. پس $x \in A$ یا $x \in B$. پس $x \in A \cup B$.

□ ادعای اول

ادعای دوم

$$A \cup B \subseteq \bigcup C$$

اگر $x \in A \cup B$ آن گاه $x \in A$ یا $x \in B$.

اگر $x \in A$ باشد از آنجا که $A \in C$ پس $x \in \bigcup C$.

به طور مشابه اگر $x \in B$ ......

بنابر ادعای اول و ادعای دوم حکم گزاره‌ی بالا ثابت شد

ZFC

یعنی در نظریه مجموعه‌ها یک دنباله نزولی با ابتدای مشخص نداریم

$x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \cdots$

اصل انتظام

$\{\{\{\{\{\{\}\}\}\}\}\}$

$x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \cdots$

برای هیچ مجموعه‌ای x_0 نمی‌توان دنباله‌ای نامتناهی به صورت بالا نوشت.

مجموعه‌ها خوش بنیاد هستند

بیان رسمی

$$\forall x \ \exists z \left(\forall t \ \ t \in z \leftrightarrow \underbrace{(\forall y \ \ y \in t \rightarrow y \in x)}_{t \subseteq x} \right)$$

$z = P(x)$

اصل ششم (اصل توان)

اگر A یک مجموعه باشد، کلاس متشکل از همه زیرمجموعه‌های A نیز یک مجموعه است که آن را با $P(A)$ یا 2^A نشان می‌دهیم

Power

$P(A) = \{ y \mid y \subseteq A \}$