منطق‌های غیرمرتبهٔ اول

اصل کمال

هر زیرمجموعهٔ از بالا کراندار از $\mathbb{R}$ دارای کوچکترین کران بالاست.

$$\forall A\subseteq \mathbb{R}\ \Big(\exists a\in\mathbb{R}\ \forall x\in A\ x\le a \to \Big(\exists z\ \Big([\forall x\in A\ x\le z]\ \wedge\ [\forall t\in\mathbb{R}\ \forall x\in A\ x\le t \to t\ge z]\Big)\Big)\Big)$$

- ویژگی ارشمیدسی اعداد حقیقی: هیچ عدد حقیقی مثبتی وجود ندارد که از تمام اعداد طبیعی بزرگتر باشد.

$$\neg\big(\exists x\in\mathbb{R}\ \ \forall a\in\mathbb{N}\ \ x>a\big)$$

قضیه

ویژگی ارشمیدسی از اصل کمال نتیجه می‌شود.

اثبات

فرض کنید یک عدد حقیقی r موجود باشد به طوری که

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad r>n$$

بنابراین $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{R}$ دارای حداقل یک کران بالا در $\mathbb{R}$ است.

حال بنا به اصل کمال $\mathbb{N}$ در $\mathbb{R}$ دارای کوچکترین کران بالاست. فرض کنید r_0 کوچکترین کران بالای $\mathbb{N}$ در $\mathbb{R}$ باشد.

$\mathbb{N}$

r_0

توجه کنید که r_0-1 کران بالائی برای $\mathbb{N}$ نیست.

زیرا اگر r_0-1 کران بالائی برای $\mathbb{N}$ باشد آن گاه r_0 از کوچکترین کران بالای $\mathbb{N}$ کوچکتر است و این غیرممکن است.

از این که r_0-1 کران بالا برای $\mathbb{N}$ نیست نتیجه می‌گیریم که

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad n > r_0 - 1$$

فرض کنید $n_0 \in \mathbb{N}$ یکی از n های بالا باشد؛ یعنی

$$n_0 > r_0 - 1$$

بنابراین

$$n_0 + 1 > r_0$$

می‌دانیم که $n_0+1 \in \mathbb{N}$ پس n_0+1 نمی‌تواند از r_0 بیشتر باشد (زیرا r_0 کران بالا برای $\mathbb{N}$ است)

سوال: کدام یک از موارد زیر در $\mathbb{R}$ درست است:

$$\forall x \in \mathbb{N} \ \exists r \in \mathbb{R} \quad r > x$$

$$\forall x \in \mathbb{N} \ \neg(\exists r \in \mathbb{R} \quad r > x)$$

توجه: r کران بالائی برای A است.

$$\forall x \in A \quad x \le r$$

r کران بالائی برای A نیست:

$$\exists x \in A \quad x > r$$

ویژگی ارشمیدسی

$$\neg\left(\exists r\in\mathbb{R}\ \ \forall n\in\mathbb{N}\ \ r>n\right)$$

معادلاً :

$$\forall r\in\mathbb{R}\ \ \exists n\in\mathbb{N}\ \ n>r$$

تمرین

نشان دهید که

$$(0,1)\cap(0,\tfrac{1}{2})\cap(0,\tfrac{1}{3})\cap(0,\tfrac{1}{4})\cap\cdots=\varnothing$$

$$\neg\left(\exists r\in\mathbb{R}^+\ \forall n\in\mathbb{N}\ r<\tfrac{1}{n}\right)\Longleftrightarrow \text{ویژگی ارشمیدسی}$$

$$\Longleftrightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(0,\tfrac{1}{n})=\varnothing$$

توجه

عبارت‌های زیر همواره درست هستند.

$$\neg(\forall x\ p(x))\Leftrightarrow \exists x\ \neg p(x)$$

$$\neg(\exists x\ R(x))\Leftrightarrow \forall x\ \neg R(x)$$

$$\mathbb{R}\models \forall n\in\mathbb{N}\ \exists r\in\mathbb{R}\ r>n$$

$$\mathbb{R}\not\models \exists r\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N}\ r>n$$

قضیه

ویژگی ارشمیدسی $\Longrightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (0,\frac{1}{n})=\emptyset$

اثبات فرض کنید $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(0,\frac{1}{n})\neq\emptyset$. فرض کنید

$r_0\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(0,\frac{1}{n})$

آن گاه

$\forall n\in\mathbb{N} \quad r_0\in(0,\frac{1}{n})$

بنابراین

$\forall n\in\mathbb{N} \quad 0<r_0<\frac{1}{n}$

بنابراین

$\forall n\in\mathbb{N} \quad \frac{1}{r_0}>n$

یعنی $\frac{1}{r_0}$ از تمام اعداد طبیعی بیشتر است

و این متناقض با ویژگی ارشمیدسی است.

توجه

$\forall r\in\mathbb{R}^+ \quad \exists n\in\mathbb{N} \quad \frac{1}{n}<r$

$0 \quad \frac{1}{n} \quad r$

$(r\notin(0,\frac{1}{n}))$

$(0,1)\cap(0,\frac{1}{2})\cap(0,\frac{1}{3})\cap(0,\frac{1}{4})\cap\dots=\emptyset$

توجه برای هر $n_0\in\mathbb{N}$

$\bigcap_{n\le n_0}(0,\frac{1}{n})\neq\emptyset$

$(0,\frac{1}{2})\cap(0,\frac{1}{3})\cap(0,\frac{1}{4})=(0,\frac{1}{4})$

نظریهٔ مجموعه‌ها — Set theory

تمامی پدیده‌های ریاضی، نوعی مجموعه هستند.

اعداد طبیعی

$\emptyset = 0$

$\{\emptyset\} = 1 = \{0\}$

$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = 2 = \{0, 1\}$

$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = 3 = \{0, 1, 2\}$

روابط (روابط هم‌ارزی) و توابع نیز مجموعه هستند.

این هم جزء ... اعداد طبیعی یک مجموعه ...

$\{(x, y, z) \mid x + y = z\}$

اعداد صحیح و گویا با استفاده از روابط هم‌ارزی روی $\mathbb{N}$ ساخته می‌شوند.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$(x, y)\, R\, (x', y') \Leftrightarrow x + y' = x' + y$

تعریف کانتور برای مجموعه‌ها

تعریف: مجموعه گردایه‌ای از اشیاء مشخص است که دارای ویژگی مشترکی هستند.

به طور خلاصه اگر $p(x)$ یک ویژگی باشد

$\{x \mid p(x)\}$

یک مجموعه است.

پارادوکس راسل

نظریهٔ مجموعه‌های پیشنهادی کانتور، تناقض‌آمیز است.

فرض کنید $p(x) = x \notin x$. در نظریهٔ مجموعه‌های کانتور عبارت زیر یک مجموعه است:

$A = \{x \mid x \notin x\}$

Self-reference خود ارجاع

پارادوکس

مثال: پارادوکس دروغگو.

مثال: پارادوکس کروکودیل و بچه کوچک

اصول ZFC

Zermelo-Fränakel-Choice

انتخاب

سوال: آیا $A\in A$؟

اگر $A\in A$ آنگاه $A\in\{x \mid x\notin x\}$ پس $A\notin A$.

اگر $A\notin A$ آنگاه $A\notin\{x \mid x\notin x\}$ پس $A\in A$.

$y\in\{x \mid x\notin x\}$