در جلسات قبل درباره نحوه ریاضی دانی
در منطق مرتبه اول بحث کنیم.
گفتیم که در منطق مرتبه اول مهم است که حالت سخن
مشخص باشد. هر سوری به صورت $\forall x$ و $\exists x$
به $x$های موجود در حالت سخن اشاره دارد.

**معادل‌سازی**

جمله مرتبه اول $\varphi$ را **همواره درست**
می‌نامیم هرگاه در هر حالتی که این جمله را
تعبیر کنیم درست باشد.

اگر $\varphi$ و $\psi$ دو جمله مرتبه اول باشند
می‌نویسیم $\varphi \Leftrightarrow \psi$ هرگاه
$\varphi \leftrightarrow \psi$ همواره درست باشد.

زبان مثال محمول [illegible] $P(x)$.

**مثال**

$$\exists x\, P(x) \Leftrightarrow \exists y\, P(y)$$

**اثبات** باید نشان دهیم که جمله
$\exists x\, P(x) \leftrightarrow \exists y\, P(y)$
همواره درست است. برای این منظور باید
نشان دهیم که جمله بالا در هر حالتی که تعبیر شود درست است.

مثال از حالت:
مجموعه دانشجویان این کلاس
$P(x)$: $x$ خانم است.
جمله‌ی بالا در حالت یادشده به معنی زیر است:
اگر $x$ وجود داشته باشد که خانم است آنگاه یک $y$ وجود دارد که خانم است.

فرض کنید $M$ یک مدل دلخواه باشد که در آن $p(m)$ [illegible]

و تمام تعبیرات [illegible] در این صورت [illegible] نشان دهیم که $\exists x\, p(x) \to \exists y\, p(y)$ درست است.

در مدل $M$ جمله [illegible]

اگر در مدل $M$ جمله $\exists x\, p(x)$ درست باشد

یعنی عنصر $m \in M$ وجود دارد که $p(m)$.

(می‌نویسیم $M \models p(m)$)

از آنجایی که $p(m)$ نتیجه می‌شود که

$M \models \exists y\, p(y)$

$(y = m)$

پس

$M \models \exists x\, p(x) \to \exists y\, p(y)$

---

اگر $\varphi$ و $\psi$ دو جمله مرتبه اول باشند

$\psi \Longleftrightarrow \varphi$ هرگاه

می‌نویسیم

$\psi \leftrightarrow \varphi$ همواره درست باشد.

**سوال** آیا جمله $\exists x\, p(x)$ همواره درست است؟

**مثال** $M = \{2, 4\}$ $\quad M \not\models \exists x\, p(x)$

$p(x)$ = x فرد است

---

**مثال**

در هر جامعه انسانی یک نفر هست که اگر او کلاه

داشته باشد همه کلاه دارند.

به بیان دیگر جمله مرتبه اول زیر همواره درست است:

$\exists x \left( H(x) \to \forall y\, H(y) \right)$

x کلاه داشته باشد

---

**مثال**

$\forall x\, H(x) \Leftrightarrow \forall y\, H(y)$

اگر $M$ یک مدل دلخواه باشد، $H$ در آن تعبیر

شده باشد

$M \models \forall x\, H(x) \Leftrightarrow$

برای هر $m \in M$ داریم $H(m)$ $\Leftrightarrow M \models \forall y\, H(y)$

---

**مثال**

$M = \{1, 2, 3, 4\}$

$H(x)$: x زوج است

**سوال** آیا

$M \models \forall x\, H(x) \leftrightarrow \forall y\, H(y)$

(چرا جمله [illegible] درست است؟)

**مثال**

جمله زیر همواره درست است

$$\forall x\,(H(x) \wedge R(x)) \leftrightarrow \forall x\, H(x) \wedge \forall x\, R(x)$$

**اثبات**

$M \models \forall x\,(H(x) \wedge R(x)) \iff$

برای هر $m \in M$ داریم $H(m) \wedge R(m)$ $\iff$

(برای هر $m \in M$ داریم $H(m)$) , (برای هر $m \in M$ داریم $R(m)$)

$\iff (M \models \forall x\, H(x)), (M \models \forall x\, R(x))$

$\iff M \models \forall x\, H(x) \wedge \forall x\, R(x)$

**مثال ۲:** آیا جمله زیر همواره درست است؟

$$\forall x\,(H(x) \vee R(x)) \leftrightarrow \forall x\, H(x) \vee \forall x\, R(x)$$

**پاسخ**

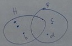
ادعا می‌کنیم که جمله بالا همواره درست نیست.

برای اثبات این ادعا کافی است یک مدل پیدا کنیم که در آن این جمله درست نباشد

$M = \{a, b, c, d\}$

$H(x): x \in H$

$R(x): x \in R$




داریم:

$M \models \forall x\,(H(x) \vee R(x))$

اما

$M \not\models \forall x\, H(x) \vee \forall x\, R(x)$

ج

$\exists x\, H(x) \vee R(x) \Leftrightarrow \exists x\, H(x) \vee \exists x\, R(x)$

فرض کنید $M \models \exists x\, H(x) \vee R(x)$. بنابراین عضو $m \in M$ موجود است

به طوری که $M \models H(m) \vee R(m)$. پس $M \models H(m)$ یا $M \models R(m)$.

پس $M \models \exists x\, H(x)$ یا $M \models \exists x\, R(x)$.

در جهت عکس فرض کنید که $M \models \exists x\, H(x) \vee \exists x\, R(x)$ آنگاه

$M \models \exists x\, H(x)$ یا $M \models \exists x\, R(x)$. پس یا ① $m \in M$ موجود است به طوری که

$M \models H(m)$ یا ② $m' \in M$ موجود است به طوری که $M \models R(m')$.

در حالت ① داریم

$$M \models H(m) \Rightarrow M \models R(m) \vee H(m)$$

$$\Rightarrow M \models \exists x\, R(x) \vee H(x)$$

در حالت 2 داریم

$$M \models R(m') \Rightarrow M \models R(m') \vee H(m') \Rightarrow$$

$$M \models \exists x\, R(x) \vee H(x)$$

مثال

آیا عبارت زیر هم‌ارز درست است؟

$$\exists x \; (H(x) \land R(x)) \leftrightarrow$$

$$\exists x \; H(x) \land \exists x \; R(x)$$

## منطق های مرتبه اول

$\forall x \in \mathbb{N} \ \exists y \in \mathbb{R}$

$\forall A \subseteq \mathbb{R} \ldots$

**مثال** اصل کمال در اعداد حقیقی

هر زیر مجموعه از بالا کراندار از اعداد حقیقی دارای کوچکترین کران بالا است.

$\forall A \subseteq \mathbb{R}$ (اگر A در $\mathbb{R}$ کران بالا داشته باشد آنگاه کوچکترین کران بالا برای A در $\mathbb{R}$ وجود دارد)

$(0,1)$

**مثال**

نشان دهید که جمله‌ی زیر همواره درست است:

$\exists y \ \forall x \ R(x,y) \rightarrow$

$\forall x \ \exists y \ R(x,y)$

(ثابت کنید)

**مثال**

آیا جمله‌ی زیر همواره درست است؟

$\forall x \ \exists y \ R(x,y) \rightarrow$

$\exists y \ \forall x \ R(x,y)$

**مثال**

$M =$ گراف

$R(x,y) =$ x و y مجاورند


$M \models \forall x \ \exists y \ R(x,y)$

$M \not\models \exists y \ \forall x \ R(x,y)$

عبارت زیر چطور؟

$\exists x \ H(x) \wedge \exists x \ R(x) \rightarrow$

$\exists x \ (H(x) \wedge R(x))$


$M \models \exists x \ H(x) \wedge \exists x \ R(x)$

$M \not\models \exists x \ (H(x) \wedge R(x))$

**تمرین**

عبارت زیر همواره درست است

$\exists x \ (H(x) \wedge R(x)) \rightarrow$

$\exists x \ H(x) \wedge \exists x \ R(x)$

اثبات کنید

$$\forall A \subseteq \mathbb{R} \left( \underbrace{\left(\exists r \in \mathbb{R} \ \forall a \in A \ \ a < r\right)}_{\substack{\text{اگر } A \text{ کران بالایی بنام} \\ r \text{ داشته باشد}}} \rightarrow \left( \exists z \ \left( \forall a \in A \ \ z > a \ \wedge \ \left( \forall r \in \mathbb{R} \ \forall a \in A \ \ r > a \rightarrow z \leq r \right) \right) \right) \right)$$

$\underline{z\}}$

$$y = \sup(A) \Longleftrightarrow \left( \forall a \in A \ \ a \leq y \right) \wedge \left( \forall z \ \left( \forall a \in A \ \ z \geq a \rightarrow z \geq y \right) \right)$$