مثال

$R(x,y)$ : $x$ و $y$ با هم دوست‌اند.

$D(x)$ : $x$ دشمن $y$ است.

① هر کس که دوست دارد دشمن هم دارد.

$$\forall x \left( \exists y \; R(x,y) \rightarrow \exists z \; D(z,x) \right)$$

برای هر $x$ اگر کسی وجود داشته باشد که با $x$ دوست است کسی هم وجود دارد که با $x$ دشمن است.

② اگر همه دوست داشته باشند یکی هست که دشمن دارد

$$\forall x \; \exists y \; R(x,y) \rightarrow \exists y \; \exists z \; D(z,y)$$

③ اگر هر یک دو دوست مشترک داشته باشند یکی هست که دشمن دارد

$$\exists x \; \forall y \; R(y,x) \rightarrow (\exists z \; D(z,x) \wedge \exists z \; D(z,x))$$

④ دوست هرکس، دشمن او هم هست.

$$\forall x \left( \exists z \; R(z,x) \rightarrow \left( \exists z \; D(z,x) \wedge D(z,z) \right) \right)$$

$$\forall x \; \forall y \left( R(y,x) \rightarrow D(z,x) \right)$$

⑤ دشمن دشمن هرکس دوست اوست.

$$\forall x \; \forall y \left( \exists z \; \left( D(z,x) \wedge D(z,z) \right) \rightarrow R(z,x) \right)$$

برای هر $x$ برای هر $y$ اگر یک $z$ وجود داشته باشد که $z$ دشمن $x$ باشد و $z$ دشمن $y$ باشد آنگاه $y$ دوست $x$ است.

هر کس دوستی دارد که دوستی ندارد

$\forall x \exists y \left( R(y,x) \wedge \forall z \neg D(z,y) \right)$

مثال ⇔ هر کس دوستی دارد که آن دوست دوستی ندارد

حل هر کس دوستی دارد دوستی ندارد

$\forall x \left( \exists y \; R(y,x) \rightarrow \forall z \neg D(z,x) \right)$

(ج)

$\left( \forall x \; p(x) \equiv \forall y \; p(y) \right)$

$\exists x \; p(x) \equiv \forall x \neg p(x)$

مثال تابع $f(x)$ در نقطه $a$ پیوسته است.

( هر همسایگی دلخواه به $f(x)$ نگاشته می‌شود و در هر همسایگی $x$ ... )

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \left( |x-a|<\delta \rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon \right)$

سوال

ثابت کنید که تابع $f(x)$ پیوسته است.

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ دلخواه مثبت

باید یک $\delta > 0$ پیدا کنیم به طوری که

$|x-a|<\delta \rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$

(ج)

$|x-a|<\delta \rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$

$|x-a|<\delta$

(ب) $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$

(ا) $|f(x)-f(a)|<\varepsilon \wedge |x-a|<\delta$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \left( |x-a|<\delta \rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon \right)$ ⇔ تابع $f$ در $a$ پیوسته است

مثال نشان دهید تابع $f(x)=2x+1$ در $x=3$ پیوسته است.

برای اینکه نشان دهیم تابع $f(x)=2x+1$ در $x=3$ پیوسته است باید نشان دهیم که

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \left( |x-3|<\delta \rightarrow |f(x)-f(3)|<\varepsilon \right)$

اول کیم $\varepsilon > 0$ دلخواه و مثبت

باید یک $\delta > 0$ پیدا کنیم که

$|x-3|<\delta \rightarrow |f(x)-f(3)|<\varepsilon$

## حرکت نوسانی

$$|(2x+1)-(2\times 3+1)| =$$

$$|2x-6| = 2|x-3|$$

پایان حرکت نوسانی

برای $\varepsilon > 0$ داده شده فرض کنید $\delta$ عددی دلخواه باشد
بطوری $\varepsilon > 2\delta$. آن‌گاه اگر $|x-3| < \delta$
آن‌گاه،

$$|f(x)-f(3)| = 2|x-3| < 2\delta < \varepsilon.$$

نتیجه: حرکت نوسانی

مثال (ریاضی نویسی)

$\forall x,y \left( \exists z \left( \exists k\ x=kz \wedge \exists k'\ y=k'z \wedge \forall z' \left( \exists k\ x=kz' \wedge \exists k'\ y=k'z' \rightarrow z \leq z' \right) \right) \right)$

هر دو عدد دارای بزرگترین مقسوم علیه مشترک هستند.

حال: اعداد طبیعی

$\forall x$ (خرد) $x <$ (کمتری)

# معناشناسی منطق مرتبه اول

یادآوری

$p \to q \iff \neg q \to \neg p$

مثال $\forall x\, p(x) \iff \forall y\, p(y)$