ضربهای دکارتی

گفتیم که اگر x ، y دو مجموعه باشند آنگاه.
عبارت زیر یک مجموعه است:

$$(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}$$

که به آن یک زوج مرتب گفته می‌شود

تعریف

اگر A ، B دو مجموعه باشند آنگاه
عبارت زیر نیز مجموعه است (حاصلضرب دکارتی A ، B).

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$$

$$A \times B = \{t \in X \mid q(t)\}$$

$$A \times B = \{t \in P(P(A \cup B)) \mid \exists x \in A\ \exists y \in B\ \ t = \{\{x\},\{x,y\}\}\}$$

یادآوری

$$(x,y) = (x_1,y_1) \Longleftrightarrow x = x_1 \wedge y = y_1$$

$$t \in A \times B \Rightarrow$$

$$t = \{\underset{\substack{P(A\cup B)\\ \Downarrow}}{\{x\}}, \underset{\substack{P(A\cup B)\\ \Downarrow}}{\{x,y\}}\} \subseteq P(A \cup B)$$

$x \in A, y \in B$

$$\Rightarrow t \in P(P(A \cup B))$$

لم

$$A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$$

ابتدا نشان می‌دهیم که $A\times(B-C)\subseteq(A\times B)-(A\times C)$

اثبات

فرض

$$(x,y)\in A\times(B-C)$$

حکم

$$(x,y)\in(A\times B)-(A\times C)$$

ساده‌تر کردن حکم،

$$(x,y)\in A\times B$$

$$(x,y)\notin A\times C$$

طبق تعریف زوج مرتب

$$(x,y)\in A\times(B-C)\Rightarrow x\in A\wedge y\in B-C$$

$$\Rightarrow x\in A\wedge y\in B\wedge y\notin C\Rightarrow$$

$p\wedge q\wedge r\Leftrightarrow(p\wedge q)\wedge(p\wedge r)$

$$\xRightarrow{\text{از قوانین منطق گزاره‌ها}}(x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\in A\wedge y\notin C)\Rightarrow$$

$$(x,y\in A\times B)\wedge((x,y)\notin A\times C)$$

حال عبارت $(A\times B)-(A\times C)\subseteq A\times(B-C)$ را ثابت می‌کنیم.

فرض

$$(x,y)\in(A\times B)-(A\times C)$$

حکم

$$(x,y)\in A\times(B-C)$$

طبق تعریف

$$(x,y)\in(A\times B)-(A\times C)\Rightarrow(x,y)\in(A\times B)\wedge$$

$$(x,y)\notin A\times C$$

تا اینجا می‌دانیم که $x\in A$, $y\in B$ و $(x,y)\notin A\times C$.

توجه تضاد برقرار که $(x,y)\notin A\times C$ $x\notin A$ یا $y\notin C$. از آنجا که $x\in A$ از $(x,y)\notin A\times C$ نتیجه می‌گیریم که $y\notin C$

پس داریم $x\in A$, $y\in B$, $y\notin C$ درنتیجه $x\in A$, $y\in B-C$ پس $(x,y)\in A\times(B-C)$.

$\square$

پایان اثبات

سوال

$(A \times B) - C \overset{?}{=} A \times (B - C)$

مثال نقض بزنید

ح

$(A \times B) - C = (A - C) \times (B - C)$

$C = \{1, 2\}$

$A = \{1\}$

$B = \{2\}$

$A \times B = \{(1,2)\}$

$A \times B - C = \{(1,2)\}$

$A - C = \emptyset$

$B - C = \emptyset$

$(A - C) \times (B - C) = \emptyset \times \emptyset = \emptyset$

زج

$(x,y) \in \emptyset \times \emptyset \Rightarrow x \in \emptyset \wedge y \in \emptyset$

برابر آیا

$(A \times B) \cup (C \times D) =$

$(A \cup C) \times (B \cup D)$

ادعا

$(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq$

$(A \cup C) \times (B \cup D)$

اثبات

اگر $(x,y) \in (A \times B) \cup (C \times D)$

آن گاه یا $(x,y) \in A \times B$ که در این صورت $x \in A$, $y \in B$ پس $x \in A \cup C$, $y \in B \cup D$ پس $(x,y) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$

یا $(x,y) \in C \times D$ " " ادامه دهید:

$A = \{1\}$

$B = \{2\}$

$C = \{2\}$

$D = \{1\}$

$A \cup C = \{1, 2\}$

$B \cup D = \{1, 2\}$

$A \times B = \{(1,2)\}$

$C \times D = \{(2,1)\}$

$\boxed{(2,2) \in (A \cup C) \times (B \cup D) - (A \times B) \cup (A \times C)}$

$$(x,y)\in (A\cup C)\times(B\cup D) \Rightarrow (x\in A\cup C)\wedge(y\in B\cup D)$$

$$\Rightarrow (x\in A \vee x\in C)\wedge(y\in B\vee y\in D).$$

$$(p\vee q)\wedge(r\vee s)\Leftrightarrow\big((p\vee q)\wedge r\big)\vee\big((p\vee q)\wedge s\big)\Leftrightarrow (p\wedge r)\vee(q\wedge r)\vee(p\wedge s)\vee(q\wedge s)$$

$$\Downarrow$$

$$(x,y)\in (A\times B)\vee(x,y)\in C\times D$$

به طور کلی اگر

$b\in B-D$

$c\in C-A$ آنگاه

$(c,b)\in (A\cup C)\times(B\cup D)$

$(c,b)\notin (A\times B)\cup(C\times D)$

روابط

فرض کنید A، B دو مجموعه باشند

به هر زیرمجموعه از $A\times B$ یک رابطه از A به B گفته می‌شود.

پس وقتی R یک رابطه از A به B باشد یعنی $R\subseteq A\times B$

توجه به جای $(x,y)\in R$ گاهی می‌نویسیم

$$xRy$$

توجه اگر R یک رابطه از A به A باشد می‌گوییم R یک رابطه روی A است

تعریف

فرض کنید R یک رابطه از A به B باشد. تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{Dom}\,R = \{x \in A \mid \exists y \in B \quad (x,y) \in R\}$$

$$\mathrm{Im}\,R = \{y \in B \mid \exists x \in A \quad (x,y) \in R\}$$

مثال فرض کنید B ، A دو مجموعه باشند

$$R = A \times B$$

یک رابطه از A به B است

$\forall x \in A \quad \forall y \in B \qquad x R y$

مثال فرض کنید X یک مجموعه باشد. رابطه تساوی روی X به صورت زیر تعریف می‌شود

$$R = \{(x,z) \mid x \in X, z \in X, x = z\}$$

$$= \{(x,x) \mid x \in X\}$$

$X \times X$

$\forall x, y \in X \quad (x R y \leftrightarrow x = y)$

مثال فرض کنید X یک مجموعه باشد. رابطه تعلق بین X ، $P(X)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\in = \{(x,y) \mid x \in X, y \in P(X), x \in y\}$$

در واقع

$(x,y) \in \, \in \Leftrightarrow x \in y$

$X = \{1,2\}$

$P(X) = \{\{1\},\{2\},\{1,2\},\emptyset\}$

$(1,\{1,2\}) \in R$

ترکیب روابط

$R\subseteq A\times B$

فرض کنید $S: B\to D$ و $R: A\to B$ دو رابطه باشند. رابطهٔ $S\circ R: A\to D$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$S\circ R\subseteq A\times D$

$(x,y)\in S\circ R \Leftrightarrow \exists t\,\big((x,t)\in R\wedge (t,y)\in S\big)$

$$\begin{array}{ccccc} A & & B & & D \\ x & \to & t & \to & y \end{array}$$

تعریف

اگر R یک رابطه باشد، معکوس R را با R^{-1} نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$R^{-1}=\{(x,y)\mid (y,x)\in R\}$$
$$=\{(y,x)\mid (x,y)\in R\}$$

مثال

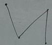
فرض کنید X یک مجموعه باشد. رابطهٔ شمول روی $P(X)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\subseteq=\{(x,y)\in P(X)\times P(X)\mid x\subseteq y\}$$

مثال

$X=$ شهر اصول

$A=\{(x,y)\mid x$ عموی y است$\}$



$X=\{$ رئوس یک گراف $\}$

$R=\{(x,y)\mid$ بین x و y یک یال وجود دارد$\}$

ویژگیهای روابط

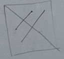
تعریف

$R \subseteq X \times X$

Symmetric

رابطه R روی مجموعه X را تقارنی می‌نامیم هرگاه

$$\forall x,y \in X \quad (x,y) \in R \Leftrightarrow (y,x) \in R$$



$$x \xrightarrow{R} t \xrightarrow{S} y$$

$(x,y) \in S \circ R \Longleftrightarrow$

$\exists t \left((x,t) \in R \wedge (t,y) \in S \right) \Longleftrightarrow$

$\exists t$ (x فرزند t باشد $\wedge$ t برادر y) $\Longleftrightarrow$ x برادرزاده y است.

$$x \xrightarrow{S} t \xrightarrow{R} y$$

$(x,y) \in R \circ S \Longleftrightarrow$

$\exists t \left(S(x,t) \wedge R(t,y) \right) \Longleftrightarrow$

$\exists t$ (t برادر x باشد $\wedge$ t فرزند y باشد)

مثال

$(x,y) \in R \Leftrightarrow$ x فرزند y باشد

$(x,y) \in S \Leftrightarrow$ y برادر x باشد

$(x,y) \in R \circ S$?

$(x,y) \in S \circ R$?

مثال

آیا رابطهٔ تعلق، $\in$، روی یک مجموعه X دلخواه تقارنی است.

$$x \in y \wedge y \in x \Rightarrow$$

$$\cdots \in x \in y \in x \in y \in x \in y \in x$$

بنابر اصل انتظام رابطهٔ تعلق تقارنی نیست.

مثال

فرض کنید X یک مجموعه باشد و $D \subseteq X$ را ثابت در نظر بگیرید.

رابطهٔ R را روی $P(X)$ به صورت زیر تعریف کنید

$$A \, R \, B \Leftrightarrow B = A \cup D$$

$$R = \{ (A,B) \mid A, B \in P(X),\ B = A \cup D \}$$

$$R = \{ (A, A \cup D) \mid A \in P(X) \}$$

دامنه و برد R را تعیین کنید

$$\mathrm{Dom}\, R = \{ A \in P(X) \mid \exists B \in P(X) \quad B = A \cup D \} = P(X)$$

$$\mathrm{Im}\, R = \{ B \in P(X) \mid \exists A \in P(X) \quad A \cup D = B \}$$

$$= \{ B \in P(X) \mid B \supseteq D \}$$