اصول نظریه مجموعه‌ها را به صورت تیتر معرفی کردیم.

اصول ZFC

اصل جانشانی را درس ندادیم.

اصل انتخاب: برای هر مجموعه یک تابع انتخاب وجود دارد.

$$\forall x \quad \exists f: x \to \bigcup x$$

$$\forall \underset{y\neq\emptyset}{y\in x} \left(f(y)\in y \right)$$

$$\{ \{1,2,3\}, \{4,5\} \}$$

$$\{1,2,3\} \xrightarrow{f} 3, \quad \{4,5\} \to 4$$

قضیه

فرض کنید X یک مجموعه باشد و $P(X)$ مجموعه تمامی زیرمجموعه‌های X باشد.

$$P(X) = \{ y \mid y \subseteq X \}$$

آنگاه $(P(X), \emptyset, X, \cap, \cup, {}^{c})$ (متمم) تشکیل یک جبر بولی را می‌دهد. یعنی تمام ویژگی‌های زیر برقرارند.

① $\forall A,B,C \subseteq X \quad (A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$

اثبات

$$x \in (A\cap B)\cap C \Leftrightarrow$$

$$(x\in A\cap B) \wedge x\in C \Leftrightarrow$$

$$(\underbrace{x\in A}_{p} \wedge \underbrace{x\in B}_{q}) \wedge \underbrace{x\in C}_{r} \overset{\overbrace{(p\wedge q)\wedge r \Leftrightarrow p\wedge(q\wedge r)}^{\text{شرکت‌پذیری}}}{\Longleftrightarrow}$$

$$(x\in A) \wedge (x\in B \wedge x\in C) \Leftrightarrow$$

$$x\in A \wedge (x\in B\cap C)$$

توجه این فرمول اول برای جبر بولی مجموعه‌ها از فرمول نظیر برای منطق گزاره‌ها نتیجه می‌شود.

$$p\wedge(q\wedge r) \Longleftrightarrow (p\wedge q)\wedge r$$

توجه: وجود $A \cap B$ از اصل تعریف نتیجه می‌شود

$$A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\}$$

②

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow$$

$$(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \Leftrightarrow (x \in A \cup B) \vee (x \in C)$$

توجه

آیا قانون دوم از قانون زیر برای منطق گزاره‌ها نتیجه می‌شود.

$$p \vee (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \vee r$$

③

$$A \cup B = B \cup A$$

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

④

$$A \cap B = B \cap A$$

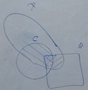
$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

⑤

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$(x \in A) \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$$



$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (6)

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$A \cup \emptyset = A$ (7)

$\Updownarrow$

$A \vee \perp \Leftrightarrow A$

گزاره همواره غلط

$\perp$	A	$A \vee \perp$
T	T	T
F	F	F

$(x \in A \vee \underbrace{x \in \emptyset}_{\perp}) \Leftrightarrow x \in A$

$A \cap \emptyset = \emptyset$ (8)

$p \wedge \perp \Leftrightarrow \perp$

$A \cup X = X$ (9)

$p \vee T \Leftrightarrow T$

$A \cap X = A$ (10)

$p \wedge T \Leftrightarrow p$

$A \cup A = A$ (11)

$p \vee p \Leftrightarrow p$

$A \cap A = A$ (12)

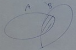
$p \wedge p \Leftrightarrow p$

$A \cap (A \cup B) = A$ (13)

$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

$A \cup (A \cap B) = A$ (14)

$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$



یادآوری

$A^c := X - A$

$= \{x \in X \mid x \notin A\}$

$A \cap A^c = \emptyset$ (15)

$p \wedge \neg p \Leftrightarrow \perp$

$A \cup A^c = X$ (16)

$p \vee \neg p \Leftrightarrow T$

(17) $(A^c)^c = A$

$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$

(18) $(A\cap B)^c = A^c \cup B^c$

$\neg(p\wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

(19) $(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$

$\neg(p\vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

توجه

$(P_r, \wedge, \vee, \perp, T, \neg)$ تشکیل یک جبر بولی می‌دهد.

تمام گزاره‌های منطق
گزاره‌ها

توجه

$(\{0,1\}, \sqcap, \sqcup, 0, 1, \neg)$ یک جبر بولی است

$0 \sqcap 1 = 0$

$0 \sqcup 1 = 1$

$\neg 0 = 1$

$\neg 1 = 0$

تعریف

می‌گوییم $A\subseteq B$ هرگاه $\forall x \, (x\in A \to x\in B)$

قضیه

اگر $A\subseteq B$ ، $B\subseteq C$ آنگاه $A\subseteq C$

اثبات

فرض کنید $A\subseteq B$ ، $B\subseteq C$.

اگر $a\in A$ آنگاه $a\in B$ (زیرا $A\subseteq B$).

پس $a\in C$ (زیرا $B\subseteq C$) یعنی اگر $a\in A$ آنگاه $a\in C$ ، و این یعنی $A\subseteq C$

قضیه

$A\subseteq B$ اگر و تنها اگر $A\cap B = A$

اثبات

فرض کنید $A\subseteq B$. آنگاه

[illegible]

① $t\in A\cap B \Rightarrow t\in A \wedge t\in B \Rightarrow t\in A$

② $t\in A \overset{A\subseteq B}{\Longrightarrow} t\in A \wedge t\in B \Rightarrow t\in A\cap B$

در نتیجه اگر $A\subseteq B$ آنگاه

$A\cap B = A$

برعکس

فرض کنید $A\cap B = A$.

$(A\cap B = A)$

$x\in A \Rightarrow x\in A\cap B \Rightarrow x\in A \wedge x\in B \Rightarrow x\in B$

پس اگر $x\in A$ از $A\cap B = A$ نتیجه می‌شود

$x\in B$ یعنی $A\subseteq B$.

$A \subseteq X$

$A^c = X - A$

قضیه

$A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$

اثبات: به عهده‌ی تو.

تمرین نشان دهید که

$(A-B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$

فرض کنید $B \subseteq A$. نشان می‌دهیم:

$x \in (A-B) \cup B \Rightarrow (x \in A-B) \vee x \in B$

$(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

$\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B)$

$\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (\underbrace{x \notin B \vee x \in B}_{T}) \overset{p \wedge T \equiv p}{\Rightarrow}$

$(x \in A \vee x \in B) \overset{B \subseteq A}{\Rightarrow} (x \in A \vee x \in A) \Rightarrow x \in A$

هم چنین با فرض $B \subseteq A$

$p \to p \vee q$

$x \in A \Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \Rightarrow \dots$

تا اینجا ثابت کردیم که اگر $B \subseteq A$ آنگاه

$(A-B) \cup A = A$

جهت عکس

فرض کنید $(A-B) \cup B = A$

حکم: $B \subseteq A$.

فرض کنید $x \in B$ آنگاه $x \in A$!

قضیه

اگر $A \subseteq B$ آنگاه $P(A) \subseteq P(B)$.

اثبات فرض کنید $A \subseteq B$. هدف: اثبات اینکه $P(A) \subseteq P(B)$.

فرض کنید $t \in P(A)$. آنگاه $t \subseteq A \subseteq B$ پس $t \subseteq B$ پس $t \in P(B)$

سوال

آیا عکس تعبیر بالا درست است؟

$P(A) \subseteq P(B) \overset{?}{\Rightarrow} A \subseteq B$

مجموعه زیرمجموعه‌های A

بله. اثبات. فرض کنید $P(A) \subseteq P(B)$

حال اگر $x \in A$ آنگاه $\{x\} \in P(A)$

پس $\{x\} \in P(B)$

یعنی $\{x\} \subseteq B$ پس

$x \in B$

تمرین نشان دهید که

$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

اثبات

فرض کنید $t \in P(A) \cap P(B)$

پس $t \subseteq A$ ، $t \subseteq B$

پس $t \subseteq A \cap B$ (زیرا اگر $x \in t$ آنگاه $x \in A$ و $x \in B$)

پس $t \in P(A \cap B)$

و برعکس به عهده شما

تمرین $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

سوال آیا عکس عبارت بالا درست است؟

$P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)$

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{4, 5, 6\}$

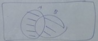
$\{3,4\} \in P(A \cup B)$

$\{3,4\} \notin P(A)$

$\{3,4\} \notin P(B)$

تمرین نشان دهید که

1. $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B) \iff A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$
2. $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$



3. آیا اگر $A \cup C = B \cup C$ نتیجه می‌گیریم $A = B$؟
4. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

ضرب‌های دکارتی

فرض کنید x, y دو مجموعه باشند. آن‌گاه $\{x\}$ ، $\{x,y\}$ نیز دو مجموعه هستند.

در نتیجه با اصل جفت‌سازی $\{\{x\},\{x,y\}\}$ نیز مجموعه است.

مجموعه‌ی بالا را با (x,y) نشان می‌دهیم.

$$(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}$$

(تمرین) نشان دهید که اجتماع همه‌ی مجموعه‌ها، مجموعه نیست)

لم

$$(x_0,y_0) = (x_1,y_1) \Longleftrightarrow (x_0 = x_1) \wedge (y_0 = y_1)$$

عکس بدیهی است.

$$\{\{x_0\},\{x_0,y_0\}\} = \{\{x_1\},\{x_1,y_1\}\} \Rightarrow$$

$$\{x_0\} \in \{\{x_1\},\{x_1,y_1\}\} \Rightarrow$$

$$\{x_0\} = \{x_1\} \vee \{x_0\} = \{x_1,y_1\}$$

$$\Rightarrow \{x_0\} = \{x_1\} \Rightarrow x_0 = x_1$$

تعریف. فرض کنید B, A دو مجموعه باشند.

$$\underbrace{A \times B}_{\text{ضرب دکارتی}} = \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

$$(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}$$

(سوال: چرا $A \times B$ یک مجموعه است؟)