اصل انتظام

Regularity

صورت رسمی

$$\forall x \left(x \neq \emptyset \to \exists y \in x \quad y \cap x = \emptyset \right)$$

$$\overbrace{\{ \underbrace{\{\{z\}\}}_{y}, \{z\}, z \}}^{x}$$

$$y \cap x = \{z\}$$

$$\{\{\{\{ \cdots \}\}\}\}$$

قضیه از اصل انتظام نتیجه می‌شود که چنین دنباله‌ای از مجموعه‌ها وجود ندارد.

$$x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni \cdots$$

(در واقع اصل انتظام می‌گوید که اگر چنین دنباله‌ای وجود داشته باشد آن‌گاه $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ مجموعه نیست)

به بیان دیگر اصل انتظام بیانگر این است که همهٔ مجموعه‌ها خوش‌بنیاد هستند

اثبات قرار دهید $A = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$

ادعا A اصل انتظام را نقض می‌کند.

ادعا می‌کنیم که برای هر $t \in A$ داریم

$$t \cap A \neq \emptyset$$

اگر $t \in A$ آن‌گاه t به صورت یک x_n است. پس $x_{n+1} \in t \cap A$.

نتیجه: از اصل انتظام نتیجه می‌شود که

$$\forall x \quad x \notin x.$$

اگر $x \in x$ آن‌گاه دنباله‌ی زیر را داریم

$$x \ni x \ni x \ni x \ni \dots$$

و این بنا بر تمرین قبل ناممکن است.

تبصره: از اصول ZFC نتیجه می‌شود که مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها نداریم. یعنی کلاس همه‌ی مجموعه‌ها، مجموعه نیست.

اثبات: فرض کنید A مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها باشد. آن‌گاه $A \in A$ و این اصل انتظام را نقض می‌کند.

مثال: عبارت زیر مجموعه نیست

$$\{x \mid x \notin x\}$$

زیرا عبارت بالا شامل همه مجموعه‌هاست

توجه

هر عبارت به صورت

$\{x \mid \varphi(x)\}$

را یک کلاس می‌نامند. یک کلاس ممکن است مجموعه باشد یا نباشد

اصل هشتم.

اصل وجود مجموعه نامتناهی (استقرائی)

$$\exists x \left(\emptyset \in x \wedge \forall y \left(y \in x \to y \cup \{y\} \in x \right) \right)$$

$$x \supseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$$

$\emptyset \in x$

$\emptyset \cup \{\emptyset\} \in x$

$\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} \in x$

$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

تعریف

به مجموعه‌ای مانند x که دارای ویژگی‌های زیر باشد

یک مجموعه استقرائی گفته می‌شود.

1. $\emptyset \in x$
2. $\forall y \left(y \in x \to y \cup \{y\} \in x \right)$

پس اصل وجود مجموعه نامتناهی در واقع بیانگر این است که

یک مجموعه استقرائی وجود دارد

تعریف: اشتراک همه مجموعه‌های استقرائی را

مجموعه اعداد طبیعی می‌نامیم

$$\mathbb{N} = \{ \overset{0}{\emptyset}, \overset{1}{\{\emptyset\}}, \overset{2}{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}}, \overset{3}{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}}, \dots \}$$

$\omega, \mathbb{N}$

$n = \{0, 1, \dots, n-1\}$

$\emptyset \in \mathbb{N}$

$\{\emptyset\} \in \mathbb{N}$

$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \mathbb{N}$

اصل انتخاب

تابع است

$\forall x \quad \exists f : x \to \bigcup x \quad \forall y \in x \; (y \neq \emptyset) \; f(y) \in y$

$x = \{ \{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\} \}$

$f(\{\,\})$

$\bigcup x = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$3 = \{0, 1, 2\}$

$2 = \{0, 1\}$

$3 \cap 2 = \{0, 1\} = 2$

قضیه مجموعهٔ اعداد طبیعی، وجود دارد.

اثبات بنا به اصل وجود مجموعهٔ نامتناهی، یک مجموعهٔ استقرائی x وجود دارد. بنا به اصل تصریح عبارت زیر یک مجموعه است (همان مجموعهٔ اعداد طبیعی است)

$$\{ y \in x \mid \forall z \; (z \text{ استقرائی باشد} \to y \in z) \}$$

$$= \{ y \in x \mid \forall z \; ((\emptyset \in z \wedge \forall t \; (t \in z \to t \cup \{t\} \in z)) \to y \in z) \}$$