۹ جلسه‌ی نهم، شنبه

مثال ۱۰۰. اگر $A \cap B = \emptyset$، $A \cup B = C$، $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$ آنگاه نشان دهید که

$$A = C - B$$

پاسخ. بنا بر اصل گسترش کافی است اثبات کنیم که

۱. $A \subseteq C - B$ و

۲. $C - B \subseteq A$.

برای اثبات (۱) باید نشان دهیم که

$$\forall x \quad \big(x \in A \to x \in (C - B)\big) \quad *$$

برای اثبات $*$ کافی است $x.$ دلخواه در نظر گرفته نشان دهیم:

$$x. \in A \to x. \in (C - B)$$

پس فرض می‌کنیم $x. \in A$. از آنجا که طبق فرض صورت سؤال $A \subseteq C$، داریم:

$$x. \in C \quad ☺$$

همچنین داریم:

$$\big(x. \in A \wedge A \cap B = \emptyset \to x. \notin B\big) \quad ☺☺$$

پس بنا به ☺☺ و ☺ داریم

$$x. \in C - B.$$

اثبات (۲)

$$x. \in C - B \Rightarrow x. \in C \wedge x. \notin B$$

از آنجا که $C = A \cup B$ پس

$$(x. \in A \cup B) \wedge (x. \notin B) \Rightarrow (x. \in A \vee x. \in B) \wedge (x. \notin B)$$

$$\Rightarrow x. \in A$$

□

۱.۹ ادامه‌ی خانواده‌ی مجموعه‌ها

در جلسه‌ی قبل درباره‌ی خانواده‌ها صحبت کردیم: برای مثال

$$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$$

یک خانواده از مجموعه‌ها با مجموعه‌ی اندیسِ Γ است. همچنین تعریف کردیم که

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x\in U | \exists\gamma\in\Gamma \quad x\in A_\gamma\}$$

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x\in U | \forall\gamma\in\Gamma \quad x\in A_\gamma\}$$

مثال ۱۰۱. خانواده‌ی زیر از مجموعه‌ها را اندیس گذاری کنید:

$$\{۱\}, \{۲,۳\}, \{۳,۴,۵\}, \{۴,۵,۶,۷\}, \ldots$$

$$A_n = \{n, n+۱, \ldots, ۲n-۱\} \qquad \Gamma = \mathbf{N}-\{۰\}$$

مثال ۱۰۲. اشتراک خانواده‌ی زیر از زیرمجموعه‌های $\mathbf{R}$ را بیابید.

$$(۰,۱) \quad (۰,\frac{۱}{۲}) \quad (۰,\frac{۱}{۳}) \quad (۰,\frac{۱}{۴}) \quad \ldots$$

بیایید خانواده‌ی بالا را به صورت زیر اندیس‌گذاری کنیم:

$$A_n = (۰,\frac{۱}{n}).$$

$$\overset{A_۱}{(۰,۱)} \quad \overset{A_۲}{(۰,\frac{۱}{۲})} \quad \overset{A_۳}{(۰,\frac{۱}{۳})} \qquad \underbrace{\overset{A_۴}{(۰,\frac{۱}{۴})}}_{=\{x\in\mathbf{R}|۰<x<\frac{۱}{۴}\}} \qquad \ldots$$

پس خانواده‌ی زیر از مجموعه‌ها را داریم:

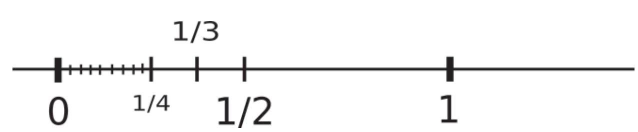
$$F = \{A_n\}_{n\in\mathbf{N}-\{۰\}}$$

اشتراک این خانواده را می‌توانیم با نمادهای زیر نیز نشان دهیم.

$$\bigcap_{n\in\mathbf{N}} (۰,\frac{۱}{n}) = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n = \bigcap F$$

داریم

$$x\in\bigcap(۰,\frac{۱}{n}) \leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N} \quad ۰<x<\frac{۱}{n}.$$



برای یافتن یک عنصرِ x که در تمام بازه‌های $(۰,\frac{۱}{n})$ واقع شود، نیاز به اطلاعاتی داریم:

۲.۹ اصل کمال

هر زیرمجموعه‌ی از بالا کراندار از اعداد حقیقی دارای کوچکترین کران بالا و هر زیرمجموعه‌ی از پائین کراندار از اعداد حقیقی دارای بزرگترین کران پائین است. [16]

نتیجه ۱۰۳ (ویژگی ارشمیدسی). در اعداد حقیقی هیچ عنصری مانند $x > ۰$ وجود ندارد بطوری که

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad ۰ < x < \frac{۱}{n}$$

معادلاً هیچ عدد طبیعی‌ای وجود ندارد به طوری که

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad x > n.$$

اثبات. فرض کنید $x_۰ \in \mathbf{R}$ از تمام اعداد طبیعی بزرگتر باشد، پس $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{R}$ دارای یک کران بالا در $\mathbf{R}$ است؛ به بیان دیگر، $x_۰$ یک کران بالا برای $\mathbf{N}$ است. پس بنا به اصل کمال، $x_۱ \in \mathbf{R}$ موجود است به طوری که

$$x_۱ = \sup \mathbf{N}$$

از این که $x_۱$ کوچکترین کران بالا برای $\mathbb{N}$ است نتیجه می‌شود که $x_۱ - ۱$ یک کران بالای $\mathbf{N}$ نیست؛ چون اگر باشد، از کوچکترین کران بالا کوچکتر می‌شود و این امکان‌پذیر نیست. پس

$$\exists n \in \mathbf{N} \quad n > x_۱ - ۱$$

یعنی

$$n + ۱ > x_۱$$

و این متناقض است با این که $x_۱$ یک کران بالا برای $\mathbf{N}$ است. $\square$

نتیجه ۱۰۴. بنا به ویژگی ارشمیدسی،

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} (۰, \frac{۱}{n}) = \emptyset$$

توجه ۱۰۵. برای هر $n \in \mathbf{N}$ داریم

$$\bigcap_{i \in \{۱,۲,\ldots,n\}} (۰, \frac{۱}{i}) = (۰, \frac{۱}{n})$$

توجه ۱۰۶. می‌دانیم که

$$(۱) \quad A \cap (B_۱ \cup B_۲) = (A \cap B_۱) \cup (A \cap B_۲)$$

[16] هر چند نیازی نیست شما فعلاً به این مطلب فکر کنید، ولی لازم به ذکر است که اصل کمال، اصلی مرتبه‌ی اول نیست. در مرتبه‌ی اول نمی‌توان روی همه‌ی زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی سور زد. سوال: آیا می‌توان عبارتی شاملِ $\forall A \subseteq \mathbb{N}\ldots$ را در زبان نظریه‌ی مجموعه‌ها نوشت؟

همچنین گفتیم که با استقراء می‌توان ثابت کرد که برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$(۲) \quad A \cap (B_۱ \cup B_۲ \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_۱) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$$

عبارت بالا را می‌توان با استفاده از خانواده‌ها به صورت زیر نوشت:

$$A \cap \bigcup_{i \in \{۱,\ldots,n\}} B_i = \bigcup_{i \in \{۱,\ldots,n\}} (A \cap B_i)$$

حال ادعا می‌کنیم که این حکم را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد:

$$(۳) \quad A \cap \Big(\bigcup_{i \in \mathbf{N}} B_i\Big) = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} (A \cap B_i)$$

سوال ۱۰۷. آیا حکم (۳) را می‌توان با استقراء ثابت کرد؟

توجه ۱۰۸. با استفاده از استقراء می‌توان احکامی مانند احکام زیر را درباره‌ی هر عدد طبیعی ثابت کرد:
برای هر عددِ طبیعیِ n داریم $p(n)$. به عنوان مثال، حکم زیر را می‌توان با استقراء ثابت کرد: برای هر $n \in \mathbf{N}$ داریم

$$۱ + ۲ + \ldots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

به عنوان مثال دیگر، این حکم که هر عدد طبیعی ناصفر از عدد قبل از خودش بزرگتر است را نیز می‌توان با استقراء ثابت کرد. اما در مورد «مجموعه‌ی اعداد طبیعی» نمی‌توان با استقراء روی اعداد طبیعی حکمی را نتیجه گرفت. برای مثال نمی‌توان حکم زیر را با استقراء ثابت کرد:
مجموعه‌ی اعداد طبیعی مجموعه‌ای نامتناهی است. حکم (۳) نیز حکمی درباره‌ی یک عددِ طبیعیِ n نیست، پس نمی‌توان آن را با استقراء ثابت کرد.

حکمِ (۳) را به صورت زیر ثابت می‌کنیم:

اثبات (۳). از آنجا که در دو طرف مجموعه داریم بنا به اصل گسترش کافی است نشان دهیم که

۱. $A \cap \big(\bigcup_{i \in \mathbf{N}} B_i\big) \subseteq \bigcup_{i \in \mathbf{N}} (A \cap B_i)$ و

۲. $\bigcup_{i \in \mathbf{N}} (A \cap B_i) \subseteq A \cap \big(\bigcup_{i \in \mathbf{N}} B_i\big)$

یک عنصرِ $x_۰ \in U$ را به صورت دلخواه در نظر بگیرید.

$$x_۰ \in A \cap \Big(\bigcup_{i \in \mathbf{N}} B_i\Big) \Rightarrow (x_۰ \in A) \wedge \Big(x_۰ \in \bigcup_{i \in \mathbf{N}} B_i\Big)$$
$$\Rightarrow x_۰ \in A \wedge \big(\exists i_۰ \in \mathbf{N} \quad x_۰ \in B_{i_۰}\big)$$

پس از اینکه $x_۰ \in A \cap (\bigcup_{i \in \mathbf{N}} B_i)$ نتیجه گرفتیم که $i_۰ \in \mathbf{N}$ موجود است به طوری که

$$x_۰ \in A \cap B_{i_۰}$$

داریم:

$$A \cap B_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in \mathbf{N}} (A \cap B_i)$$

پس

$$x_0 \in \bigcup_{i \in \mathbf{N}} (A \cap B_i)$$

اثبات ۲.

$$x_0 \in \bigcup_{i \in \mathbf{N}} (A \cap B_i) \Rightarrow \exists i_0 \in \mathbf{N} \quad x_0 \in A \cap B_{i_0}$$

پس $x_0 \in A$ ۳ و $x_0 \in B_{i_0}$. از آنجا که $B_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in \mathbf{N}} B_i$ پس $x_0 \in \bigcup_{i \in \mathbf{N}} B_i$ ۴.

از ۳ و ۴ نتیجه می‌شود که

$$x_0 \in A \cap (\bigcup_{i \in \mathbf{N}} B_i)$$

□

قضیه ۱۰۹ (پخش‌پذیری)**.** فرض کنید Γ یک مجموعه‌ی اندیس باشد.

۱. $A \cap \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \left(A \cap B_\gamma\right)$

۲. $A \cup \left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \left(A \cup B_\gamma\right)$

قضیه ۱۱۰.

۱. $\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right)^c = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma^c$

۲. $\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma})A_\gamma\right)^c = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma^c$

تمرین ۱۱۱. فرض کنید $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ و $\{B_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ خانواده‌هایی از مجموعه‌ها باشند، نشان دهید که

$$\text{۱} \quad (\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) \cap (\bigcup_{\delta \in \Delta} B_\delta) =$$

$$\bigcup_{\delta \in \Delta} (\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \cap B_\delta) = \bigcup_{\delta \in \Delta} (\bigcup_{\gamma \in \Gamma} (A_\gamma \cap B_\delta)) =$$

$$\bigcup_{\delta \in \Delta} \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (A_\gamma \cap B_\delta) := \bigcup_{(\delta, \gamma) \in \Delta \times \Gamma} (A_\gamma \cap B_\delta)$$

$$\text{۲} \quad (\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) \cup (\bigcap_{\delta \in \Delta} B_\delta) =$$

$$\bigcap_{\delta \in \Delta} (\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \cap B_\delta) = \bigcap_{\delta \in \Delta} \bigcap_{\gamma \in \Gamma} (A_\gamma \cup B_\delta)$$

$$③ \quad (\bigcup_{i=۱}^{m} A_i) \cap (\bigcup_{j=۱}^{n} B_j) \overset{\Delta=\{۱,...,n\},\Gamma=\{۱,...,m\}}{=} \bigcup_{j\in\{۱,...,n\}} \bigcup_{i\in\{۱,...,m\}} (A_i \cap B_j)$$

تمرین ۱۱۲. فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد و $\{J_k\}_{k\in L}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های I باشد به طوری که

$$\bigcup_{k\in L} J_k = I.$$

نشان دهید که

۱. $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{k\in L} \bigcup_{j\in J_k} A_j$

۲. $\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{k\in L} \bigcap_{j\in J_k} A_j$