۱ جلسه‌ی هشتم، دوشنبه

در جلسه‌ی قبل ثابت کردیم که اگر مجموعه‌ی A دارای n عضو باشد، آنگاه $p(A)$ دارای ۲^n عضو است. [1] وقتی می‌گوییم یک مجموعه n عضو دارد یعنی در **تناظر یک به یک** با مجموعه‌ی

$$n = \{۰, ۱, \ldots, n - ۱\}$$

است. مثلاً مجموعه‌ی

$$\{\text{حسن}, \text{علی}, \text{حسین}\}$$

دارای سه عضو است، زیرا می‌توان حسن را با ۱ و علی را با ۲ و حسین را با ۳ متناظر کرد:

$$۳ = \{۰, ۱, ۲\}$$

مجموعه‌ی اعداد طبیعی

$$\mathbf{N} = \{۰, ۱, ۲, \ldots\}$$

دارای $\aleph_۰$ عضو است. در بخش‌های آینده این مفاهیم را دقیق توضیح خواهیم داد و خواهیم دید که:

$$|\mathbf{N}| = \aleph_۰$$

$$|\mathbf{Q}| = \aleph_۰$$

$$|\mathbf{R}| = ۲^{\aleph_۰}$$

۱.۱ اجتماع دو مجموعه

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. آنگاه یک مجموعه‌ی C موجود است به طوری که

$$\forall x \quad (x \in C \leftrightarrow x \in A \vee x \in B)$$

مجموعه‌ی C را اجتماع دو مجموعه‌ی A, B خوانده آن را با $A \cup B$ نشان می‌دهیم.

اثبات. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. بنابه اصل جفت‌سازی

$$D = \{A, B\}$$

یک مجموعه است، به بیان بهتر بنا به اصل جفت‌سازی از آنجا که A, B مجموعه‌اند:

$$\exists D \quad \forall x \quad (x \in D \leftrightarrow x \in A \vee x \in B)$$

حال بنا به اصل اجتماع،

$$\exists E \quad \forall x \quad (x \in E \leftrightarrow \exists y \in D \quad x \in y)$$

[1] Power set of A

پس

$$\forall x \quad (x \in E \leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$$

مجموعه‌ی E در بالا همان $A \cup B$ است. $\square$

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. عبارت زیر، بنا بر اصل تصریح یک مجموعه است:

$$\{x \in A | x \in B\}$$

مجموعه‌ی بالا را با $A \cap B$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱. فرض کنید A, B, X مجموعه باشند و $A, B \subseteq X$. نشان دهید که

۱. $A \cup \emptyset = A$

۲. $A \cap X = A$

۳. $A \cup A = A$

۴. $A \cap A = A$

۵. $A \cup B = B \cup A$

۶. $A \cap B = B \cap A$

۷. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

۸. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

اثبات. مورد دوم: بنا به اصل گسترش، برای این که نشان دهیم که $A \cap X = A$ باید ثابت کنیم که

$$\forall x \quad (x \in A \cap X \leftrightarrow x \in A)$$

مجموعه‌ی دلخواه x_0 را در نظر بگیرید. باید نشان دهیم:

$$x_0 \in A \cap X \leftrightarrow x_0 \in A$$

طبق تعریف اشتراک داریم:

$$x_0 \in A \cap X \leftrightarrow (x_0 \in A) \wedge (x_0 \in X)$$

پس کافی است نشان دهیم که

$$(x_0 \in A) \wedge (x_0 \in X) \leftrightarrow x_0 \in A.$$

می‌دانیم که

$$p \wedge q \rightarrow p$$

پس داریم:

$$(x_\circ \in A) \wedge (x_\circ \in X) \rightarrow x_\circ \in A$$

همچنین از آنجا که $A \subseteq X$ داریم

$$x_\circ \in A \rightarrow x_\circ \in X$$

عبارت زیر تاتولوژی است:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow \big(p \rightarrow (p \wedge q)\big)$$

پس

$$x_\circ \in A \rightarrow (x_\circ \in A) \wedge (x_\circ \in X)$$

□

تمرین ۲. نشان دهید که

۱. $A \subseteq B \iff A \cup B = B$

۲. $A \subseteq B \iff A \cap B = A$

۳. $A \subseteq C, B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$

۴. $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \iff C \subseteq A$

۵. $A \cup B = A \cap B \iff A = B$

۶. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$

سوال ۳. آیا عبارت زیر درست است؟

$$A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$$

پاسخ. مثال نقض.

$$A = \{۱, ۲, ۳\}$$

$$B = \{۲\}$$

$$C = \{۳\}$$

داریم

$$A \cup B = A \cup C \wedge \neg B = C$$

□

تمرین ۴. فرض کنید $A, B_۱, \ldots, B_n$ مجموعه باشند. با استفاده از استقراء نشان دهید که

$$A \cap (B_۱ \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_۱) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$$

و

$$A \cup (B_۱ \cap \ldots \cap B_n) = (A \cup B_۱) \cap \ldots \cap (A \cup B_n)$$

۲.۱ تفاضل

اگر A و B دو مجموعه باشند،تفاضل نسبی آنها را با $A-B$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A-B=\{x\in A | x\notin B\}$$

احتمالاً در دبیرستان خوانده‌اید که مجموعه‌ای به نام **مجموعه‌ی مرجع** وجود دارد که همه‌ی مجموعه‌ها زیرمجموعه‌ی آنند. در زیر درستی این گفته را بررسی می‌کنیم. در جلسات قبل ثابت کردیم که مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها وجود ندارد.

سوال ۵. آیا مجموعه‌ای وجود دارد که همه‌ی مجموعه‌ها، زیر مجموعه‌ی آن باشند؟

پاسخ. فرض کنید C مجموعه‌ای باشد که همه‌ی مجموعه‌ها زیرمجموعه‌ی آنند. بنابراین بنا به اصل اجتماع، $\bigcup C$ نیز یک مجموعه است. ادعا می‌کنیم که $\bigcup C$ شامل همه‌ی مجموعه‌هاست، و این تناقض است، زیرا مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها وجود ندارد.
فرض می‌کنیم A یک مجموعه‌ی دلخواه باشد. ادعا می‌کنیم که $A\in\bigcup C$. برای اثبات این ادعا باید نشان دهیم که $D\in C$ موجود است، به طوری که $A\in D$. می دانیم که $\{A\}$ بنا به اصل زوج‌سازی یک مجموعه است و $A\in\{A\}$ ادعا می‌کنیم که $\{A\}\in C$. می‌دانیم که $\{\{A\}\}$ نیز یک مجموعه است. بنا به فرضمان درباره‌ی C داریم

$$\{\{A\}\}\subseteq C$$

پس

$$\{A\}\in C.$$

□

بنابراین این ادعّای دبیرستانی که مجموعه‌ای مرجع وجود دارد که همه‌ی مجموعه‌ها زیرمجموعه‌ی آنند درست نیست. اما نیاز به داشتن یک مجموعه‌ی «به‌اندازه‌ی‌کافی‌بزرگ» را چگونه برطرف کنیم؟ می‌دانیم که اجتماع هر تعداد (کم!) از مجموعه، یک مجموعه است. فرض می‌کنیم که U یک مجموعه باشد که **همه‌ی مجموعه‌هایی که ادامه‌ی این درس درباره‌ی آنها صحبت خواهیم کرد،** زیر مجموعه‌ی آن باشند. کافی است U را اجتماع همه‌ی مجموعه‌هائی بگیریم که در این جزوه بدانها اشاره شده است. پس بیایید U را مجموعه‌ی مرجع بنامیم.

تعریف ۶. برای هر مجموعه A تعریف کنید:

$$A^c=U-A$$

تمرین ۷. نشان دهید که

$$A-B=A\cap B^c$$

قضیه ۸. ۱. $(A^c)^c=A$

۲. $\emptyset^c=U$

۳. $U^c=\emptyset$

۴. $A \cap A^c = \emptyset$

۵. $A \cup A^c = U$

۶. $A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c$

۷. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

۸. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

مثال ۹. نشان دهید که برای هر مجموعه‌ی A ، B و C داریم:

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

پاسخ. بنا به اصل گسترش، کافی است نشان دهیم:

$$\text{۱} \quad A \cap (B - C) \subseteq (A \cap B) - (A \cap C)$$

و

$$\text{۲} \quad (A \cap B) - (A \cap C) \subseteq A \cap (B - C)$$

□

اثبات. برای اثبات موارد ۱ و ۲ باید نشان دهیم که

$$\forall x \quad x \in A \cap (B - C) \leftrightarrow x \in (A \cap B) - (A \cap C)$$

فرض کنید x یک مجموعه‌ی دلخواه باشد.

$$x \in A \cap (B - C) \iff (x \in A) \wedge (x \in B - C) \iff$$

$$(x \in A) \wedge (x \in B \wedge x \notin C) \iff$$

$$(x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \iff$$

$$x \in (A \cap B) \wedge (x \notin A \cap C) \iff$$

$$x \in (A \cap B) - (A \cap C)$$

□

تمرین ۱۰. نشان دهید که

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

تعریف می‌کنیم

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

تمرین ۱۱. فرض کنید که A یک مجموعه باشد و $X = P(A)$. نشان دهید که $(X, \oplus)$ یک گروه آبلی است؛ یعنی موارد زیر را نشان دهید:

۱. $\forall A, B \in X \quad A \oplus B \in X$

۲. $\forall A, B \in X \quad A \oplus B = B \oplus A$

۳. $\forall A, B, C \in X \quad A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

۴. $\forall A \quad A \oplus \emptyset = A$

۵. $\forall A \quad A \oplus A = \emptyset$

در واقع در تمرین بالا نشان داده‌اید که $\oplus$ ویژگی‌هائی شبیه جمع اعداد دارد. هر چند در بالا این که

$$A \oplus A = \emptyset$$

با درک ما نسبت به جمع اعداد سازگار نیست!

تمرین ۱۲. موارد زیر را ثابت کنید:

۱. $A - B = A - (A \cap B)$

۲. $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B^c$

۳. $A - B = B^c - A^c$.

۴. $(A - B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$

۵. $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$

۶. $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$.

۷. $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$

۸. $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

۹. $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

۱۰. $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$

۱۱. اگر $A \cap B = \emptyset, A \cup B = C, B \subseteq C, A \subseteq C$ آنگاه $A = C - B$.

۳.۱ خانواده‌های مجموعه‌ها

فرض کنید Γ یک مجموعه باشد. برای هر $\gamma \in \Gamma$ یک مجموعه‌ی A_γ در نظر بگیرید. عبارت زیر را ، یک خانواده‌ی اندیس‌دار از مجموعه‌ها می‌خوانیم:

$$\{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\} = \{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$$

معمولاً در ریاضیات در موارد زیر از کلمه‌ی خانواده به جای مجموعه استفاده می‌شود.

۱. خانواده‌ی مورد نظر، مجموعه نباشد: خانواده‌ی همه‌ی مجموعه‌ها
البته در این مورد بهتر است از کلمه‌ی «کلاس» استفاده می‌شود.

۲. برخی از اعضا در خانواده‌ی مورد نظر تکراری باشند: $A_\gamma = A_{\gamma'}$. مانند خانواده‌ی زیر:

$$A = \{a, a, a, a\}$$

در این درس، ما به علت دوم در بالا از کلمه‌ی خانواده استفاده کرده‌ایم، زیرا می‌دانیم که همه‌ی مجموعه‌هائی که درباره‌ی آنها صحبت می‌کنیم زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی مرجع U هستند.
فرض کنید $F = \{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\bigcup F = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x \in U | \exists\gamma \in \Gamma \quad x \in A_\gamma\}$$

$$\bigcap F = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x \in U | \forall\gamma \in \Gamma \quad x \in A_\gamma\}$$

مثال ۱۳. قرار دهید

$$\Gamma = \{۰, ۱, ۲, ۳\}$$

در زیر یک خانواده‌ی متناهی مثال زده‌ایم که توسط Γ اندیس‌گذاری شده است.

$$F = \{A_۰, A_۱, A_۲, A_۳\}$$

داریم:

$$\bigcup F = A_۰ \cup A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳$$

$$\bigcap F = A_۰ \cap A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳$$

تمرین ۱۴. خانواده‌ی F در زیر را اندیس گذاری کنید و اجتماع و اشتراک آن را بیابید.

$$\{۱\}, \{۲, ۳\}, \{۳, ۴, ۵\}, \{۴, ۵, ۶, ۷\}, \ldots$$